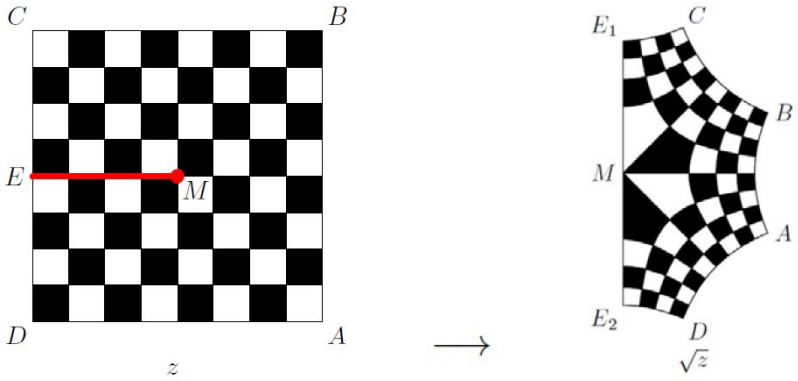
platform wiskunde nederland

Complexe Getallen

Nazomercursus 2025

Antwerpen, 19 en 20 september, 2025

Amsterdam, 26 en 27 september, 2025



PLATFORM WISKUNDE VLAANDEREN

Nazomercursus2025

Voor leraren in de exacte vakken aan havo-, vwo-, hbo-leerlingen en andere belangstellenden organiseert het Platform Wiskunde Nederland (PWN), in nauwe samenwerking met het Platform Wiskunde Vlaanderen (PWV), in 2025 een nazomercursus met als thema:

"Complexe Getallen"

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, **vrijdag 19 september** en **zaterdag 20 september** op de universiteit van Antwerpen (Campus Groenenborger) en op **vrijdag 26 september** en **zaterdag 27 september** op het CWI in Amsterdam (de routebeschrijvingen staan aan het einde van deze brochure). We starten op vrijdag om 15.30 uur, het einde is voorzien op zaterdag rond 14.30 uur.

De cursus is voor wiskundedocenten van elk niveau toegankelijk. Deelnemers ontvangen bij aanvang van de cursus een syllabus met teksten van de voordrachten. Het cursusgeld bedraagt €99. Voor studenten van lerarenopleidingen is het cursusgeld slechts €39. Voor gepensioneerden geldt een speciaal tarief van €55.

Bij de cursus is inbegrepen een avondmaaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.

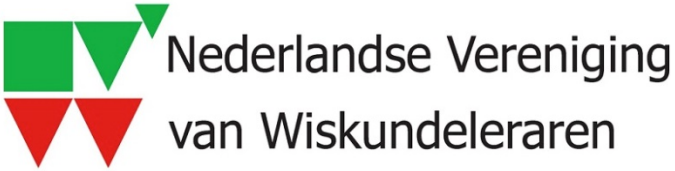
Aanmelding

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan:

- door het aanmeldingsformulier achter in deze brochure in te vullen en vóór 1 september 2025 op te sturen aan PWN;
- via de website van Platform Wiskunde Nederland: https://www.platformwiskunde.nl/nazomercursus waar een online registratieformulier ingevuld en opgestuurd kan worden, eveneens vóór 1 september 2025.

Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daar prijs op stelt, gelieve het betreffende vakje aan te kruisen op het aanmeldingsformulier. Omdat zaken rondom "Register Leraar" momenteel aan verandering onderhevig zijn, is het mogelijk dat er een andere wijze van registratie plaatsvindt.

Sponsoring
Deze cursus wordt mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO). Organisatie vindt plaats in samenwerking met het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI), de Universiteit Antwerpen en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW).



Voorlopig Programma

Antwerpen: vrijdag 19 en zaterdag 20 september
Amsterdam: vrijdag 26 en zaterdag 27 september

Wijzigingen voorbehouden

vrijdag

15.00-15.30	Ontvangst, koffie
15.30-15.35	Welkomstwoord
15.35-16.20	K.P. Hart: *Ontstaansgeschiedenis van de complexe getallen*
16.20-16.45	Pauze
16.45-17:30	K.P. Hart: *Gonioformules en het Baseler probleem*
17.30-18.30	Diner
18.30-19.15	Paul Levrie: *Π in het complexe vlak*
19.15-19.45	Pauze
19.45-20.30	K.P. Hart: *Complexe Integratie*

zaterdag

09.30-09.45	Ontvangst, koffie
09.45-10.45	K.P. Hart: *Hoofdstelling van de Algebra en machtreeksen*
10.45-11.15	Pauze
11.15-12.00	Daan Huybrechs: *Veeltermen in het complexe vlak*
12.00-13.00	Lunch
13.00-13.45	Daan Huybrechs: *Rationale functies in het complexe vlak*
13.45-14.30	Daan Huybrechs: *Voorbeelden en toepassingen*
14.30	*Afsluiting*

Voorwoord

De nazomercursus (voorheen de vakantiecursus) voor wiskundeleraren is al sinds 1946 een begrip in Nederland. Sedert 2023 vindt de nazomercursus voor wiskundeleraren ook plaats in Vlaanderen, en wel in Antwerpen. Platform Wiskunde Nederland en Platform Wiskunde Vlaanderen werken op verschillende fronten samen, onder andere bij de zeer succesvolle rondreizende tentoonstelling ''Imaginary – pracht en kracht van wiskunde'' (2022-2023). Het samen organiseren van de nazomercursus is weer een nieuw aspect in deze samenwerking, en we hopen in de toekomst op nog meer fronten samen te kunnen werken, o.a. gesterkt door het feit dat we dezelfde taal spreken. Er kwamen altijd al wel Vlaamse leraren naar de nazomercursus in Nederland, we hopen dit jaar een groter aantal Vlaamse wiskundeleraren (en andere geïnteresseerden) te kunnen begroeten, in Antwerpen of Amsterdam.

NC2025 heeft als thema “complexe getallen”. Complexe getallen vormen een essentieel onderdeel van de wiskunde: ze bieden niet alleen oplossingen voor vergelijkingen die geen reële oplossingen hebben, maar openen ook een geheel nieuw perspectief op meetkunde, analyse en toepassingen in natuurkunde en techniek. Tijdens deze cursus nemen we u mee in de rijke wereld van de complexe getallen, van hun historische ontstaan tot aan geavanceerde toepassingen. We beginnen met de opkomst van de complexe getallen en hun rol bij het oplossen van algebraïsche problemen. Vervolgens ontdekken we hoe complexe getallen een krachtige rol spelen in goniometrie, elektrische circuits, en integratieleer. Ook de diepere structuren, zoals de Hoofdstelling van de Algebra en toepassingen in het complexe vlak, komen aan bod. De cursus biedt zo een uitgebalanceerde mix van theorie, geschiedenis en praktische voorbeelden, die leraren direct kunnen benutten in hun onderwijs.

De cursus sluit uitstekend aan op de toenemende aandacht voor verdieping in het wiskundeonderwijs, zowel in Nederland als Vlaanderen. Complexe getallen zijn in veel eindtermen en curricula opgenomen als essentieel onderdeel van de wiskundige vorming. De nazomercursus 2025 biedt niet alleen inspirerende inhoud, maar ook handvatten om complexe getallen op een toegankelijke en aantrekkelijke manier over te brengen op leerlingen. Dankzij de inzet van onze enthousiaste en deskundige sprekers wordt het gegarandeerd een inspirerende tweedaagse!

We hopen weer veel wiskundeleraren, maar ook andere belangstellenden te mogen (zoals studenten van de lerarenopleiding), te verwelkomen op een inspirerende nazomercursus 2025!

Wil Schilders, voorzitter programma comité NC 2025 en directeur PWN
Giovanni Samaey, voorzitter Platform Wiskunde Vlaanderen

Docenten

K.P. Hart (hoofddocent)

Klaas Pieter Hart (beter bekend onder zijn initialen: KP) studeerde wiskunde aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Hij studeerde af en promoveerde op werk in de Algemene Topologie. De aard van de problemen dreef hem ook de Verzamelingenleer in. Na een postdoc in Košice en een jaar in Oxford (OH) kwam hij in dienst van de TU Delft, alwaar hij ongestoord door mocht blijven gaan met onderzoek in de Topologie en Verzamelingenleer.

In 1996 trad hij toe tot de redactie van Pythagoras en hij zit daar nog steeds in. Tussen 2011 en 2023 gaf hij het college Set Theory voor Mastermath en sinds zijn pensionering vermaakt hij ''ouderen'' met wiskundecursussen bij het HOVO in Leiden.

Daan Huybrechs

Daan Huybrechs is hoogleraar aan het Departement Computerwetenschappen aan KU Leuven en behoort tot de onderzoeksafdeling NUMA. NUMA specialiseert zich in wiskundige en numerieke technieken voor hedendaagse problemen rond simulaties, dataverwerking en allerhande computationale algoritmes.

Zijn onderzoek richt zich op twee luiken, benaderingstheorie en golfpropagatie. Hij doceert vakken in die richting, zoals "Complex analysis and applications", en “Wavelets with applications in Signal and Image Processing”, en is tevens auteur van een boek over numerieke integratietechnieken in het complexe vlak.

Sinds 2020 is Daan Huybrechs programmadirecteur van de Master of Science in Mathematical Engineering, een ingenieursopleiding die zich richt op wiskundige technieken voor het oplossen van problemen in de moderne digitale samenleving. Hij is werkzaam aan KU Leuven sinds 2010, na een doctoraat in Leuven en postdoc aan de universiteit van Cambridge.

Paul Levrie

Paul Levrie studeerde wiskunde aan de KU Leuven en behaalde aldaar in 1987 een doctoraat in de numerieke analyse bij het departement Computerwetenschappen. Tot voor kort doceerde hij wiskunde aan de faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen van de UAntwerpen. Zijn onderzoek situeert zich (meestal) in het domein van de Analyse.

Hij is intensief bezig met het populariseren van de wiskunde, o.a. door het geven van lezingen voor een breed publiek. Hij schrijft bijdragen over wiskunde voor het tijdschrift EOS en heeft ook een wiskundeblog bij EOS. In 2014 verscheen van zijn hand het boek De Pracht van Priemgetallen, over de geschiedenis van de priemgetallen, bedoeld voor de wiskundig geïnteresseerde leek. Het boek won in 2014 een prijs voor wetenschapscommunicatie en kende 6 herdrukken. Sinds 2016 organiseert hij in Antwerpen een MathsJam, en sinds enkele jaren doet hij dat ook op de NWD (Nationale Wiskunde Dagen). Hij is redactielid van de wiskundetijdschriften Wiskunde en Onderwijs (Vlaanderen) en Pythagoras (Nederland).

Abstract K.P. Hart

Een inleiding tot de complexe getallen, een beetje geschiedenis, en wat toepassingen.

Rafael Bombelli en Caspar Wessel. Eén van de uitvinders/bedenkers van complexe getallen was Rafael Bombelli die een uitweg zocht uit het probleem dat de formules van Cardano niet altijd tot de oplossingen van een derdegraadsvergelijking leiden, ook al liggen die met een scheef oog voor het oprapen. Denk aan het bekende voorbeeld $x^3 = 15x + 4$, met voor de hand liggende oplossing $x = 4$. Bombelli voerde de complexe getallen in op een manier die in feite nog steeds wordt gehanteerd.
Een andere uitvinder is Caspar Wessels; deze Noors-Deense landmeter schreef een artikel waarin hij op meetkundige wijze een rekenkunde in het vlak definieerde: vectoroptelling volgens de kop-staartmethode, en vermenigvuldiging via gelijkvormige driehoeken.
Dit leidt op meetkundige wijze tot de algebra van de complexe getallen.

Het Baseler Probleem. De meetkundige formulering van vermenigvuldiging leidt direct tot de formule van De Moivre, te weten

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

Met behulp hiervan leidde Cauchy in Note VIII van zijn *Analyse Algébrique* allerlei betrekkingen tussen gionometrische functies af. De binomiaalformule helpt $\cos nx$ en $\sin nx$ in sommen van producten van $\cos x$ en $\sin x$ uit te drukken.
Een toepassing hiervan is de formule waar Euler beroemd mee werd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Het bewijs gebruikt niet veel meer dan de gevolgen van de formule van De Moivre, de relatie tussen nulpunten en coëfficiënten van polynomen, en wat ongelijkheden voor goniofuncties.

Complexe integratie. Een krachtig wapen in de Complexe Analyse is integraal van een complexe functie over een kromme in het complexe vlak.
Deze wordt gedefinieerd via reële integralen over intervallen maar ontleent zijn kracht aan de integraalformules van Cauchy, die de waarden van de integralen verbindt aan functiewaarden in enkele punten. Dat laatste stelt ons in staat integralen uit te rekenen door niet te integreren maar door die functiewaarden te bepalen.
De integraalstelling laat ons daardoor veel meer doen.

Hoofdstelling van de Algebra. Er is een bewijs van de Hoofdstelling van de Algebra dat niet meer nodig heeft dan de Integraalstelling van Cauchy voor cirkels om de oorsprong.

Machtreeksen. Elke analytische functie is rond elk punt van zijn domein te ontwikkelen in een machtreeks; dit volgt uit de stelling van Cauchy plus de formule van de som van een meetkundige rij.
Die reeks convergeert op de grootste cirkelschijf om het centrale punt die binnen het domein past. En dit helpt te verklaren waarom sommige functies die analytisch zijn op de reële rechte, zoals bijvoorbeeld de arctangens, machtreeksontwikkelingen hebben met kleine convergentiestraal.

Abstract Paul Levrie

In deze les confronteren we jullie nogmaals met de kracht van complexe getallen. Ze laten je bijvoorbeeld toe om een betekenis te geven aan $\ln(-1)$ (één betekenis? Meerdere betekenissen!), iets wat in feite onmiddellijk volgt uit wat wel eens de mooiste formule uit de wiskunde wordt genoemd:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Verder kan je door gebruik te maken van complexe getallen ook eenvoudig pythagorische drietallen (je weet wel: drie gehele getallen die de lengtes zijn van de zijden van een rechthoekige driehoek) genereren uit andere.
Tot slot laten we zien hoe complexe getallen gebruikt kunnen worden bij het vinden van formules voor π zoals de beroemde formule van Machin uit 1706:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Dergelijke formules, waarin arctan's met een klein argument voorkomen, worden vaak gebruikt om veel decimalen van het getal π te berekenen. De eerste computer die hierbij werd ingezet was de ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer), in 1949. Met bovenstaande formule werden toen 2037 decimalen berekend (in 70 uur). Ter info: het huidige record, 202 biljoen decimalen van π, dateert van juni 2024.

Abstract Daan Huybrechs

Les 1: veeltermen in het complexe vlak. Wiskunde zit vol functies die we maar wat graag beter begrijpen. We krijgen heel wat inzicht door ze te benaderen met veeltermen (polynomen). Veeltermen zijn eenvoudige en flexibele bouwstenen en je kan er veel mee doen: je kan er nulpunten van berekenen, minima en maxima, afgeleiden en integralen ... en vaak is dat voor veeltermen eenvoudiger te doen dan voor de functies die ze benaderen. Dat lukt helaas niet altijd. Zo is het van belang dat de functie afleidbaar is, liefst een aantal keren. Dat zegt veel maar ook nog niet alles: veeltermen geven hun geheimen pas prijs wanneer je kijkt naar complexe getallen en het complexe vlak. Wat is het gedrag van een functie wanneer het argument een complex getal is? Dat vertelt je hoe goed — of hoe slecht — de veeltermbenadering zich zal gedragen. De geschiedenis van veeltermbenadering loopt gelijk met de geschiedenis van analyse zelf. Deze eerste les start dan ook rond het einde van de negentiende eeuw, met de la Vallée-Poussin die vanuit Leuven aan wiskundigen ter wereld de vraag stelde hoe je $f(x) = |x|$, de absolute waarde van x, benadert met veeltermen. En hoe zit het met machtreeksen? Het convergentiegebied van veeltermen is nog steeds genoemd naar Bernstein, die in 1912 de vraag beantwoordde.

Les 2: rationale functies in het complexe vlak. Een rationale functie $r(x) = p(x)/q(x)$ is het quotiënt van twee veeltermen. Ze zien er bedrieglijk eenvoudig uit, en je zou denken dat zij minstens evenveel bestudeerd werden als veeltermen. Maar niets is minder waar! Splitsen in partieelbreuken is een handige manier om integralen uit te rekenen die we allemaal kennen, toepassen en aanleren — dat wel. Maar voor andere inzichten was het nog wachten tot een kleine eeuw na de veeltermen. Sterker nog dan bij veeltermen begrijpen we rationale functies aan de hand van complexe getallen en het complexe vlak, en vooral aan de hand van "polen". In heel wat toepassingen duiken zij op: een mechanisch systemen dat begint trillen (staat je wagen in de juiste versnelling?) heeft ongetwijfeld last van een pool in het complexe vlak. We keren terug naar de vraag van de la Vallée-Poussin over $|x|$ om het fundamentele verschil tussen veeltermen en rationale functies te zien. Daarvoor gebruiken we een handig algoritme, AAA genaamd ("triple-A"), dat ontdekt werd in 2018. Via veeltermen en rationale functies loopt een rechte lijn van de negentiende eeuw via enkele ontwikkelingen tot hedendaags wiskundig en toegepast onderzoek. Complexe getallen en complexe analyse zijn een onmisbaar element van dat verhaal.

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt €99, waarbij de syllabus en de maaltijden zijn inbegrepen. Voor studenten aan lerarenopleidingen bedraagt het cursusgeld €39, terwijl voor gepensioneerden een gereduceerd tarief geldt van €55.

Aanmelding

Via de website: https://www.platformwiskunde.nl/nazomercursus of per post door het aanmeldingsformulier achterin de brochure in te vullen en op te sturen naar:

Platform Wiskunde Nederland
o.v.v. Nazomercursus 2025
Science Park 123
1098 XG Amsterdam

Tegelijkertijd dient men het cursusgeld over te maken op bankrekening **NL95INGB0005864482** van de Stichting Platform Wiskunde Nederland onder vermelding van uw naam en NC2025.

Onze buitenlandse gasten kunnen voor betaling gebruik maken van onderstaande gegevens.

BANK ING BANK N.V.
BIC INGBNL2A
IBAN NL95INGB0005864482

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit
Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te laten weten door aankruising van het betreffende vakje op het aanmeldingsformulier.

Plaats(en)

Antwerpen: Universiteit Antwerpen, Campus Groenenborger

Amsterdam: CWI, Turingzaal, Science Park 123.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor vragen over de Nazomercursus kunt u zich wenden tot het bureau van Platform Wiskunde Nederland, via het mailadres:
nazomercursus@platformwiskunde.nl

Contactinformatie

Bureau PWN, 020 – 592 4006; e-mail: nazomercursus@platformwiskunde.nl;

Platform Wiskunde Nederland, Science Park 123, 1098 XG Amsterdam

Docenten

Dr. K.P. Hart, Faculteit EWI, TU Delft, Postbus 5031, 2600 GA Delft
k.p.hart@tudelft.nl

Em. Prof. Dr. P. Levrie, faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, UAntwerpen, Groenenborgerlaan 171 – gebouw Z, 2020 Antwerpen, en departement Computerwetenschappen, KU Leuven, Celestijnenlaan 200A – bus 2402, 3001 Leuven, België
paul.levrie@uantwerpen.be

Prof. dr. ir. D. Huybrechs, Departement Computerwetenschappen, KU Leuven, Celestijnenlaan 200A, 3001 Leuven, België
daan.huybrechs@kuleuven.be

Routebeschrijvingen

Universiteit Antwerpen, Campus Groenenborger

Voor een plattegrond van de campus, routebeschrijvingen en informatie over parkeren zie:
https://www.uantwerpen.be/nl/overuantwerpen/campussen/campus-groenenborger/

CWI Amsterdam

Voor routebeschrijvingen zie: https://www.cwi.nl/nl/over/contact/

Parkeren: Bij het oprijden van het terrein van het CWI gaat de slagboom automatisch open. U ontvangt van de contactpersoon bij de ingang een uitrijkaart. Bij het verlaten van het terrein dient u deze kaart voor de scanner te houden, waarna de slagboom omhoog gaat. Op deze manier kunt u gratis op het terrein parkeren.

AANMELDINGSFORMULIER NAZOMERCURSUS 2025

'Complexe Getallen'

Ondergetekende,

Naam:

Adres:

Postcode:

Woonplaats:

Geboortedatum:

Telefoon:

E-mail:

wenst deel te nemen aan de Nazomercursus 2025 op de locatie

Antwerpen op vr. 19 en za. 20 september 2025 [ ]

Amsterdam op vr. 26 en za. 27 september 2025 [ ]

en heeft het verschuldigde bedrag van €99,- (dan wel €39,- of €55) overgemaakt (voor rekeningnummer zie pagina 11).

Mijn voorkeur gaat uit naar vegetarisch eten [ ]

Ik heb een bepaalde allergie [ ]

Indien ja, aub de dieetwensen mailen naar nazomercursus@platformwiskunde.nl

Nascholingscertificaat [ ]

Indien van toepassing, hier het adres van de onderwijsinstelling vermelden:

.....

Gelieve dit formulier vóór 1 september 2025 te sturen naar:

Platform Wiskunde Nederland
o.v.v. Nazomercursus 2025
Science Park 123
1098 XG Amsterdam