

P L A T F O R M

WISKUNDE

V L A A N D E R E N

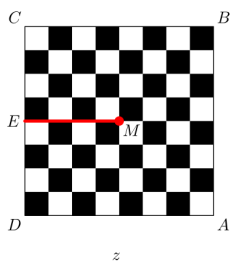
Complexe Getallen: complexe oplossingen van reële problemen

Syllabus Nazomercursus 2025

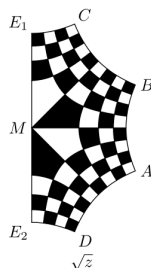
(online versie)

Antwerpen, 19 en 20 september 2025

Amsterdam, 26 en 27 september 2025



→



P L A T F O R M

WISKUNDE

V L A A N D E R E N

Complexe Getallen: complexe oplossingen van reële problemen

Syllabus Nazomercursus 2025
(online versie)

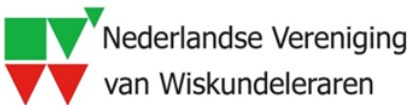
Antwerpen, 19 en 20 september 2025
Amsterdam, 26 en 27 september 2025

Programmacommissie

prof. dr. Wil Schilders (PWN, TU/e) (voorzitter)
dr. K.P. Hart (TUD) (eindredactie syllabus)
Joanne de Jager MSc (NVVW, Metis Montessori Lyceum)
prof. dr. Paul Levrie (UAntwerpen)
dr. Jeroen Spandaw (TUD)
Els Vanlommel (PWV, Heilig Hart van Maria Berlaar)

e-mail: nazomercursus@platformwiskunde.nl

Sponsors



Platform Wiskunde Nederland, Science Park 123, 1098 XG Amsterdam
Telefoon: 020-592 4006, Website: <https://platformwiskunde.nl>

Platform Wiskunde Vlaanderen
Website: <https://platformwiskunde.be>

Nazomercursus 2025

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken op middelbare/hogere scholen en andere belangstellenden wordt al sinds 1946 jaarlijks georganiseerd, in eerste instantie door en in het in 1946 opgerichte Mathematisch Centrum (MC) in Amsterdam, tegenwoordig het Centrum Wiskunde en Informatica (CWI). Na enige jaren ging men de cursus op twee locaties houden: Amsterdam en Eindhoven.

In 2010 heeft het Platform Wiskunde Nederland (PWN) de organisatie overgenomen. Omdat er ook vaak Vlaamse deelnemers zijn, en om daarnaast de banden met het Platform Wiskunde Vlaanderen (PWV) te versterken, ontstond in 2022 het idee om de Vakantiecursus voortaan gezamenlijk te gaan organiseren. Vandaar dat vanaf 2023 de cursus ook in Vlaanderen plaatsvindt, namelijk aan de Universiteit van Antwerpen. In 2024 werd besloten om de cursus niet meer aan het einde van de vakantie te houden, maar wat later aangezien dit beter past in de agenda's van de leraren. Dientengevolge werd ook de naamgeving aangepast, en voortaan zullen we dus spreken over de Nazomercursus. De cursus zal plaatsvinden in Antwerpen en natuurlijk ook weer aan het CWI, zelfs al voor de 80e keer! Het thema dit jaar is enerzijds traditioneel, anderzijds is het ook razend interessant, met wederom een aantal uitmuntende sprekers. De Nazomercursus wordt mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO). De organisatie vindt plaats in nauwe samenwerking met het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), de Universiteit van Antwerpen en de platforms voor wiskunde in Nederland en Vlaanderen. De presentaties van de sprekers zullen zo veel mogelijk beschikbaar komen op de PWN-website:

<https://www.platformwiskunde.nl/nazomercursus>

Historie

De eerste vakantiecursus wordt in het jaarverslag 1946 van het Mathematisch Centrum als volgt vermeld:

Op 29 en 31 Oct. '46 werd onder auspiciën van het M.C. een druk bezochte en uitstekend geslaagde vacantiecursus gehouden voor wiskundeleeraren in Nederland. Op 29 October stond de wiskunde, op 31 October de didactiek van de wiskunde op de voorgrond. De sprekers waren:

Prof. Dr. O. Bottema, "De prismoïde",

Dr. A. Heyting, "Punten in het oneindige",

Mr. J. v. IJzeren, "Abstracte Meetkunde en haar betekenis voor de Schoolmeetkunde.",

Dr. H.D. Kloosterman, "Ontbinding in factoren",

Dr. G. Wielenga, "Is wiskunde-onderwijs voor alpha's noodzakelijk?",

Dr. J. de Groot, "Het scheppend vermogen van den wiskundige" en

Dr. N.L.H. Bunt, "Moeilijkheden van leerlingen bij het beginnend onderwijs in de meetkunde".

Aan het einde van de vacantiecursus werden diverse zaken besproken die het wiskunde-onderwijs in Nederland betroffen. Een Commissie werd ingesteld, die het M.C. over de verder te organiseren vacantiecursussen van advies zou dienen. Hierin namen zitting een vertegenwoordiger van de Inspecteurs van het V.H. en M.O. benevens vertegenwoordigers van de lerarenverenigingen Wimecos en Liwenagel.

Mede in verband met op deze vacantiecursus naar voren gekomen wensen, werd ingesteld een colloquium over moderne Algebra, een dispuut over de didactiek van de wiskunde, beiden hoofdzakelijk bedoeld voor de leeraren uit Amsterdam en omgeving, terwijl tevens vanwege het M.C. een cursus over Getallenleer werd toegezegd te geven door de heeren v.d. Corput en Koksma. (Colloquium, dispuut en cursus zijn in 1947 gestart en verheugen zich in blijvende belangstelling).

Docenten

dr. K. P. Hart

DIAM, Faculteit EWI, TU Delft, Mekelweg 4, 2628 CD Delft

web: <https://fa.its.tudelft.nl/~hart>

e-mail: k.p.hart@tudelft.nl

Em. Prof. Dr. P. Levrie

faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, UAntwerpen, Groenenborgerlaan 171 – gebouw Z, 2020 Antwerpen en departement Computerwetenschappen, KU Leuven, Celestijnenlaan 200A – bus 2402, 3001 Leuven, België

e-mail: paul.levrie@uantwerpen.be

Prof. dr. ir. D. Huybrechs

Departement Computerwetenschappen, KU Leuven, Celestijnenlaan 200A, 3001 Leuven, België

e-mail: daan.huybrechs@kuleuven.be

© Het copyright van de hoofdstukken ligt bij de auteurs.

Programma

Vrijdag 19 september 2025 / 26 september 2025

15.00–15.30		<i>Ontvangst, koffie</i>
15.30–15.35		<i>Welkomstwoord</i>
15.35–16.20	K. P. Hart	Onstaansgeschiedenis van de complexe getallen
16.20–16.45		<i>Pauze</i>
16.45–17.30	K. P. Hart	Gonioformules en het Baseler probleem
17.30–18.30		<i>Diner</i>
18.30–19.15	Paul Levrie	π in het complexe vlak
19.15–19.45		<i>Pauze</i>
19.45–20.30	K. P. Hart	Complexe Integratie

Zaterdag 20 september 2025 / 27 september 2025

09.00–09.45		<i>Ontvangst, koffie</i>
09.45–10.45	K. P. Hart	Hoofdstelling van de Algebra en machtreeksen
10.45–11.15		<i>Pauze</i>
11.15–12.00	Daan Huybrechs	Veeltermen in het complexe vlak
12.00–13.00		<i>Lunch</i>
13.00–13.45	Daan Huybrechs	Rationale functies in het complexe vlak
13.45–14.30	Daan Huybrechs	Voorbeelden en toepassingen
14.30		<i>Afsluiting</i>

Inhoudsopgave

1	Wat iedereen over Complexe Functies moet weten — K. P. Hart	1
1.1	Wat geschiedenis	2
1.1.1	Rafael Bombelli	2
1.1.2	Caspar Wessel	5
1.1.3	Wat hebben we geleerd?	12
1.1.4	Wat afspraken	13
1.2	Het Baseler probleem	14
1.3	Differentiëren en Integreren	20
1.3.1	Differentieerbaarheid	20
1.3.2	Analytische functies	25
1.3.3	Integralen	27
1.4	De Integraalformule van Cauchy	41
1.5	Machtreeksen	47
1.6	De arctangens	55
2	Complexe getallen en π — Paul Levrie	67
2.1	Inleiding over het getal π en zijn geschiedenis	67
2.2	Arctangentrelaties en π	69
2.3	Arctangentrelaties en complexe getallen	71
2.4	Complexe getallen en getaltheorie	73
3	Rationale functies in het complexe vlak — Daan Huybrechs	75
3.1	Veeltermen en veeltermbenaderingen	76
3.1.1	Een stukje geschiedenis (met een centrale rol voor Leuven)	77
3.1.2	Veeltermbenaderingen van analytische functies	79
3.1.3	Benadering van functies met polen	80
3.1.4	Conclusies	83
3.1.5	Veeltermen beschrijven de wereld!	84
3.2	Rationale functies en rationale benaderingen	84
3.2.1	Waarom (niet) rationale functies?	84
3.2.2	Voorstellingen van rationale functies	85
3.2.3	Benaderen met rationale functies in theorie	87
3.2.4	Benaderen met rationale functies in praktijk	88
3.2.5	Conclusies	90
3.3	Voorbeelden en toepassingen	90

1 Wat iedereen over Complexe Functies moet weten

K. P. Hart

Inleiding

In 1900 schreef Paul Painlevé in *Notice sur les travaux scientifiques* het volgende:

Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.

Het doel van deze colleges is een paar basisbegrippen en -resultaten uit de theorie van de complexe functies uit te leggen en te laten zien hoe deze “plus facile et plus court” tot reële resultaten leiden.

Zoals in zoveel gebieden gelden in de wiskunde ook behoudswetten;¹ vóór we de makkelijke en korte weg kunnen bewandelen moeten we wel wat moeite doen om daar te komen. We hebben een paar fundamentele stellingen nodig die de naam van Cauchy dragen: zijn integraalstelling en zijn integraalformules. Die worden hier op schrift volledig uitgelegd maar tijdens het college omwille van de tijd slechts genoemd en toegepast.

Naast de naam van Cauchy moeten we ook die van Riemann en Weierstrass noemen. Riemann beschouwde complexe functies als afbeeldingen. Op de voorkant van dit boekje is de werking van de wortelfunctie te zien: deze functie neemt het vierkant links, snijdt het in tot het middelpunt, en vervormd het tot de figuur rechts. Wat Riemann vaststelde was dat dat vervormen niet willekeurig was: hoeken tussen krommen blijven bewaard (de hoeken in de rechterfiguur zijn allmeaal recht) en ‘infinitesimale’ driehoekjes worden in gelijkvormige driehoekjes overgevoerd. De bijdrage van Weierstrass is die van de machtrekken; analytische functies zijn oneindig vaak differentieerbaar en lokaal gelijk aan de som van hun Taylorreeksen. Deze drie equivalente gezichtspunten samen geven de Complexe-Functie-theorie haar grote kracht.

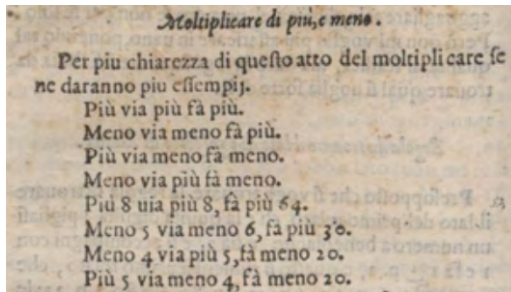
¹Voor de wet van behoud van ellende

1.1 Wat geschiedenis

We beginnen met wat geschiedenis: waar komen de complexe getallen vandaan en wie heeft ze bedacht? Een wat uitgebreidere geschiedenis van de complexe getallen, van de hand van Jan van Maanen en met de titel *avant la lettre*, is te lezen in de Syllabus van de Vakantiecursus 1983, zie [13].

1.1.1 Rafael Bombelli

De geschiedkundigen zijn het er wel over eens dat we Rafael Bombelli als bedenker/ontdekker van de complexe getallen kunnen beschouwen. In 1572 schreef hij een boek, *L'Algebra*, waarin hij de algebra van die tijd zo begrijpelijk en doorwrocht mogelijk behandelde. Hij schreef het in het Italiaans en in eenvoudige taal, en met hier en daar stampregeltjes als “plus maal plus is plus, plus maal min is min, min maal plus is min, min maal min is plus”, zoals in Figuur 1.1.



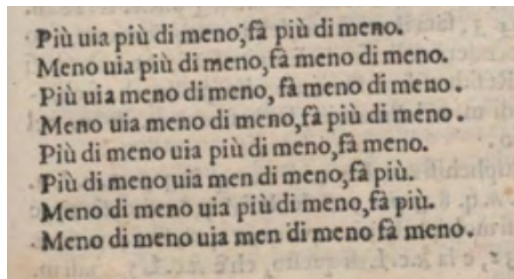
Figuur 1.1: Bombelli's stampregels voor vermenigvuldigen

Op bladzijde 169 kijkt Bombelli vooruit naar de oplosmethoden voor de derdegraadsvergelijkingen, in het bijzonder die van de vorm $x^3 = ax + b$ (met a en b positief). De methode die Cardano in zijn *Ars Magna* had gepubliceerd leidt in het geval van $x^3 = 15x + 4$ onderweg tot de kwadratische vergelijking $y^2 - 4y + 125 = 0$, waarvan de oplossingen essentiële ingredienten van de eindoplossing zijn. Maar, helaas, die laatste vergelijking heeft geen reële oplossingen. De oorspronkelijke vergelijking heeft die wel: vul maar $x = 4$ in. Bombelli vond dat onbevredigend en bedacht een manier om de oplossingen van de hulpvergelijking op te schrijven en om ermee te rekenen.

Hij bekeek de getallen die wij nu imaginair noemen. In de zestiende eeuw

ging het oplossen van vergelijkingen grotendeels nog in woorden en wat wij nu $3i$ noemen noemde hij de *più di meno* van 3, en noteerde dat kortweg als p. di m. 3. Hij maakte nog onderscheid tussen positief en negatief en noemde $-3i$ de *meno di meno* van 3, en schreef m. di m. 3.

Bombelli besteedde daarna enige tientallen pagina's aan het uitleggen hoe met deze nieuwe 'getallen' gerekend moest worden, met vele voorbeelden en een paar stampregels, zie figuur 1.2.



Figuur 1.2: Bombelli's stampregels voor wortels

NB Voor wie zich afvraagt waarom er in de plaatjes soms 'via' en soms 'uia' staat: 'via' staat voor 'maal' en de letters u en v zijn lang uitwisselbaar geweest.

Een paar voorbeelden

Bombelli begon met een reeks vermenigvuldigingen, telkens van derdemachtswortels van de nieuwe getallen. Met die derdemachtswortels deed hij in het begin eigenlijk niets.

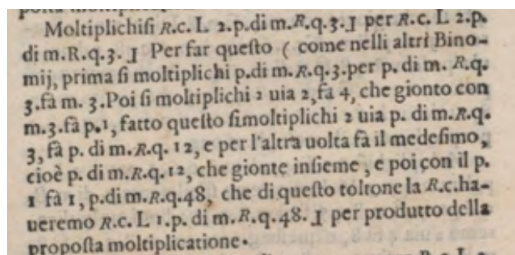
Voorbeeld 1.1.1. De opdracht in Figuur 1.3 luidt

“Moltiplichifi R. c. [2. p. di m. R. q. 3] per R. c. [2. p. di m. R. q. 3].”

In onze taal: vermenigvuldig $\sqrt[3]{2 + i\sqrt{3}}$ met $\sqrt[3]{2 + i\sqrt{3}}$. De hele alinea is hier aan gewijd en, zoals gezegd, de $\sqrt[3]{}$ speelt geen rol; Bombelli vermenigvuldigt netjes $2 + i\sqrt{3}$ met zichzelf. In stappen: $i\sqrt{3}$ maal $i\sqrt{3}$ levert 3, en 2 maal 2 levert 4 en dat samengenomen geeft 1. Vervolgens levert 2 maal $i\sqrt{3}$ ons $i\sqrt{12}$ en $i\sqrt{3}$ maal 2 natuurlijk ook en samen geeft ons dat $i\sqrt{48}$.

Het product is dus gelijk aan $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{48}}$.

Er volgen nog vele voorbeelden van dit soort vermenigvuldigingen, vrijwel altijd van derdemachtswortels dus en een vierkantswortel als imaginair



Figuur 1.3: Een vermenigvuldiging

deel. Dit lijkt erop te wijzen dat het Bombelli vooral om de oplossingen van derdegraadsvergelijking ging, maar later wordt er ook nog gedeeld en afgetrokken.

Onderweg neemt Bombelli wat tijd om derdemachtswortels van de nieuwe getallen te bepalen. Hij begint met $R. c. [2. p. di m. R. q. 121]$, zeg maar $2 + i\sqrt{121}$. Bij het vermenigvuldigen heeft hij al ontdekt dat, in onze termen, *als* $(a + ib)^3 = 2 + i\sqrt{121}$ *dan* ook $(a^2 + b^2)^3 = 2^2 + \sqrt{121}^2 = 125$. Hij zoekt dan ook kwadraten die optellen tot 5 en dat zijn 4 en 1.

Daarna volgt, in woorden, de berekening van de derde macht van $\sqrt{4} + i$, waarbij duidelijk is dat Bombelli het merkwaardig product $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3$ kent. In inderdaad, $(2 + i)^3 = 2 + i11$.

Het volgende voorbeeld laten we als een opgave.

Opgave 1.1.2. Bepaal op Bombelli's manier de derdemachtswortel van $52 + i\sqrt{2209}$.

De derdegraadsvergelijking

Op pagina 293 neemt Bombelli de vergelijking $x^3 = 15x + 4$ onder handen. Wat Cardano in Hoofdstuk XII van zijn *Ars Magna* als een recept in woorden formuleerde gaat tegenwoordig als volgt. Schrijf $x = u + v$ en substitueer dit in de vergelijking:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 15(u + v) = 4$$

herschrijf het linkerlid:

$$3uv(u + v) + u^3 + v^3 = 15(u + v) + 4$$

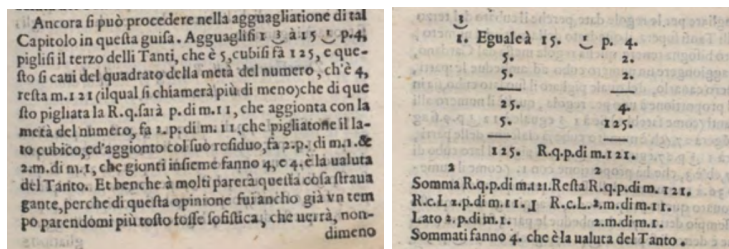
Als we nu u en v zo kunnen vinden dat $3uv = 15$ en $u^3 + v^3 = 4$ dan is $u + v$ een oplossing van de vergelijking. We zien dat u en v moeten voldoen

aan $u^3v^3 = 5^3$ en $u^3 + v^3 = 4$. Maar dit is een tweedegraadsvergelijking in vermomming: bedenk dat

$$(t - u^3)(t + v^3) = t^2 - (u^3 + v^3)t + u^3v^3$$

Dus u^3 en v^3 zijn de oplossingen van $t^2 - 4t + 125 = 0$. En hier zou de trein normaal gesproken stoppen want kwadraat afsplitsen levert de vergelijking $(t - 2)^2 = -121$, en de *abc*-formule geeft ons de oplossingen $t = 2 \pm \sqrt{-121}$. Volgens de regels van Cardano moest Bombelli nu de derdemachtswortels uit deze getallen trekken. En dat had hij nu net op bladzijden 183 en 184 gedaan: $2+i$ en $2-i$. Dat wil zeggen hij had $(2+i)^3 = 2+i11$ gevonden maar had ook de complex toegevoegde al herkend, hij noemde die “Residuo”, en wist dat dus ook $(2-i)^3 = 2-i11$.

Van Cardano moeten we de getallen optellen en dat geeft de oplossing die we al gezien hadden: $x = 2 + i + 2 - i = 4$.



Figuur 1.4: Bombelli's oplossing van $x^3 = 15x + 4$

Het is een aardige puzzel om te proberen Bombelli's eigen oplossing te ontcijferen, zie figuur 1.4. In de tweede regel links staat de vergelijking weergegeven als: $1\overset{3}{\smile}$ à $15\overset{1}{\smile}p.4$. Hierin staan $\overset{3}{\smile}$ en $\overset{1}{\smile}$ voor de derde en eerste macht van de onbekende (die hier de *Tanto* wordt genoemd); en verder staan à en p. voor respectievelijk gelijkheid en plus.

1.1.2 Caspar Wessel

De Noor Caspar Wessel werd in 1798 de *Koninklijke Inspecteur voor Landmeting* in Denemarken. In 1799 verscheen van zijn hand een artikel in *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* met de welluidende titel *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsog, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Oplosning*. Hierin beschreef hij de wiskunde die hij en anderen ontwikkeld hadden bij het op-

meten van Denemarken, en het vertalen van de meetresultaten naar vlakke kaarten.

Het artikel opent met een beschrijving van wat wij nu het rekenen met vectoren zouden noemen. Voor het optellen van gerichte lijnstukken voerde Wessel de kop-staartmethode in, met eenvoudige rechtvaardigingen.

Zo is de som van 3 voet vooruit en 2 voet achteruit niet de samenvoeging van de eerste 3 en tweede 2 voeten, maar de som is één voet vooruit.

Evenzo in een driehoek: als daar de eerste zijde van a naar b gaat en de tweede van b naar c , dan is de som de derde zijde: die van a naar c . Dit kunnen we noteren als $ab + bc$, zodat ac en $ab + bc$ hetzelfde betekenen, ofwel $ac = ab + bc = -ba + bc$, want ba is de tegengestelde van ab .

Vervolgens beschreef Wessel hoe twee gerichte lijnstukken/vectoren te vermenigvuldigen.

Eerst sprak hij een *eenheid* af, een lijnstuk waarmee de andere lijnstukken gemeten kunnen worden. De eenheid noteerde hij met 1 (soms ook $+1$). Dan: het product van twee vectoren moet uit de eerste factor gevormd worden op precies dezelfde wijze als de tweede factor uit de eenheid gevormd wordt. Dat wil zeggen

Eerst de vectoren moeten zó zijn dat ze in het vlak waar de eenheid ligt geplaatst kunnen worden.

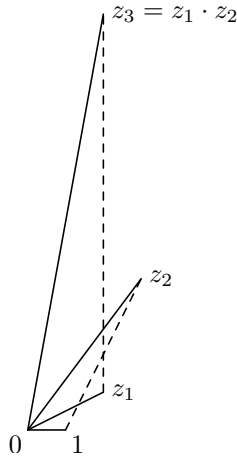
Daarnaast wat betreft de lengte van het product: deze moet zich tot de lengte van de eerste factor verhouden als de lengte van de tweede factor tot de eenheid.

Ten slotte als de eenheid, de eerste factor, en de tweede factor een gemeenschappelijk beginpunt worden gegeven dan moet het product in het vlak van de eenheid liggen en evenveel graden van de eerste factor afwijken, en aan dezelfde kant, als de tweede factor afwijkt van de eenheid, zodat de richtingshoek van het product (of zijn afwijking van de eenheid) gelijk is aan de som van de richtingshoeken van de factoren.

Dat is een hele mond vol maar ik heb het zo opgeschreven om een klein beetje te laten proeven hoe Wessel zijn definities uitlegde.

Laten we wat plaatjes maken; in het tijdschrift staan diverse tekeningen maar die hebben betrekking op het tweede deel van het artikel dat over het landmeten en kaarten maken gaat.

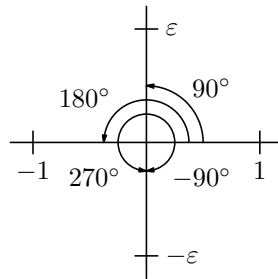
De driehoeken $[0, z_1, z_3]$ en $[0, 1, z_2]$ in figuur 1.5 zijn gelijkvormig: de verhouding van de lengten van $[0, z_1]$ en $[0, z_3]$ is gelijk aan die van de lengten van $[0, 1]$ en $[0, z_2]$ (de tweede eis) en de hoek tussen $[0, z_1]$ en $[0, z_3]$ is gelijk aan die tussen $[0, 1]$ en $[0, z_2]$, zoals in de derde eis.



Figuur 1.5: Vermenigvuldiging volgens Wessel

De wortel uit -1

Wessel noteerde de ‘positieve rechte lijnige eenheid’ met $+1$ en met $+\varepsilon$ “een zekere andere eenheid, loodrecht op de positieve eenheid, en met hetzelfde beginpunt”. De richtingshoek van $+1$ is dan 0° , die van -1 is 180° , die van $+\varepsilon$ is 90° en die van $-\varepsilon$ is -90° of 270° . Zie figuur 1.6 voor deze ‘windrichtingen’. Volgens de regel dat de richtingshoek van een product



Figuur 1.6: De vier windrichtingen

de som van die van de factoren is krijgen we dan $(+1) \cdot (+1) = +1$, $\dots$, $(+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) = 1$, $\dots$ (er staan tien van zulke producten in het artikel). En Wessel concludeerde dat “ ε wordt $\sqrt{-1}$ ”.

Op de x -as verandert er overigens niets, daar werkt deze vermenigvuldi-

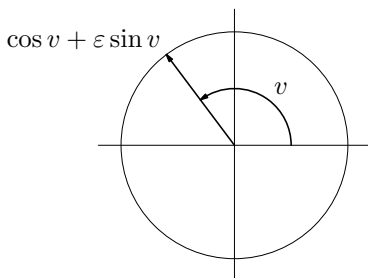
ging net zoals we voor reële getallen gewend zijn. Dankzij de meetkundige aanpak is bijvoorbeeld ook meteen duidelijk waarom twee negatieve getallen een positief product hebben: beide hebben een hoek van 180° en hun product dus een hoek van 360° , wat overeenkomt met een hoek van 0° .

Wessel heeft hiermee in het platte vlak een optelling en vermenigvuldiging gemaakt die die van de reële getallen uitbreiden. En daarbij hebben we ook twee oplossingen, namelijk ε en $-\varepsilon$, van de vergelijking $x^2 = -1$ gekregen.

Sinussen en cosinussen

Wessel had wel door dat zijn vermenigvuldiging niet echt makkelijk uit te voeren was: stel dat je de lijnstukken OA en OB wilt vermenigvuldigen, met $A = (2, 1)$ en $B = (3, 4)$. De lengten van die lijnstukken zijn makkelijk te bepalen ($\sqrt{5}$ en 5) maar hun richtingshoeken niet.

Daarom keek hij naar de werking van die vermenigvuldiging op de eenheidscirkel. Hij begon met op te merken dat elke straal van de cirkel een richtingshoek, zeg v , heeft en dus te schrijven is als $\cos v + \varepsilon \sin v$, zie figuur 1.7. Voor alle duidelijkheid: men noemde elk lijnstuk van het mid-



Figuur 1.7: Een straal van de cirkel

delpunt naar een punt op de cirkel *een straal* van de cirkel. Wat wij nu *de straal* noemen is dus de gemeenschappelijke lengte van alle stralen. Neem nog een straal, met richtingshoek u ; dan is de richtingshoek van het product van de twee stralen gelijk aan $v + u$, en dan kunnen we dat product schrijven als $\cos(v + u) + \varepsilon \sin(v + u)$.

Het product $(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u)$ kunnen we dus schrijven als $\cos(v + u) + \varepsilon \sin(v + u)$. Maar, schreef Wessel, we mogen ook gewoon de haakjes wegwerken tot

$$\cos v \cdot \cos u - \sin v \cdot \sin u + \varepsilon(\cos v \cdot \sin u + \cos u \cdot \sin v)$$

waarbij we dus $\varepsilon^2 = -1$ gebruiken. Dat dit het juiste antwoord oplevert volgt uit de bekende goniöformules voor $\cos(v+u)$ en $\sin(v+u)$.

Makkelijker vermenigvuldigen

Wessel nam nu vier (gerichte) lijnen a , b , c , en d van willekeurige lengte en wel zo dat $a + \varepsilon b$ en $c + \varepsilon d$ in hetzelfde vlak liggen als het lijnstuk $+1$.

Stelling 1.1.3. *Het product $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d)$ verkrijgt men door de haakjes weg te werken: het is gelijk aan $ac - bd + \varepsilon(ad + bc)$. Hierbij gebruikt men dat $\varepsilon^2 = -1$.*

Bewijs. De lengte van $a + \varepsilon b$ noemen we A en de richtingshoek v ; en $c + \varepsilon d$ heeft lengte C en richtingshoek u . Maar dan geldt $a + \varepsilon b = A \cos v + A\varepsilon \sin v$ en $c + \varepsilon d = C \cos u + C\varepsilon \sin u$ zodat $a = A \cos v$, $b = A \sin v$, $c = C \cos u$, en $d = C \sin u$.

Per definitie geldt dan $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = AC(\cos(v+u) + \varepsilon \sin(v+u))$ en dat is weer gelijk aan

$$AC(\cos v \cdot \cos u - \sin v \cdot \sin u) + AC\varepsilon(\cos v \cdot \sin u + \cos u \cdot \sin v)$$

Vervang nu $AC \cos v \cdot \cos u$ door ac , $AC \sin v \cdot \sin u$ door bd , enzovoort. Dan krijgen we wat te bewijzen was. $\square$

Nu is het product van de hierboven genoemde lijnstukken OA en OB snel uitgerekend. We hebben $OA = 2 + \varepsilon$ en $OB = 3 + \varepsilon 4$, dus

$$\begin{aligned} OA \cdot OB &= (2 + \varepsilon)(3 + \varepsilon 4) \\ &= (6 - 4) + \varepsilon(8 + 3) = 2 + \varepsilon 11 \end{aligned}$$

Verder rekenen

Wessel ging verder: als we een quotiënt met de noemer vermenigvuldigen krijgen we de teller.

Dit gebruikte hij om aan te tonen dat het quotiënt van $A(\cos v + \varepsilon \sin v)$ en $B(\cos u + \varepsilon \sin u)$ gelijk is aan $\frac{A}{B}(\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u))$. Immers, volgens de definitie geldt

$$\frac{A}{B}(\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u)) \times B(\cos u + \varepsilon \sin u) = A(\cos v + \varepsilon \sin v)$$

en dat is genoeg.

Gewapend met deze formule gaf Wessel ook formules voor $\frac{1}{c+\varepsilon d}$ en $\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d}$.

Als in het bewijs hierboven schrijven we $a + \varepsilon b = A(\cos v + \varepsilon \sin v)$ en $c + \varepsilon d = C(\cos u + \varepsilon \sin u)$ zodat $a = A \cos v$, $b = A \sin v$, $c = C \cos u$, en $d = C \sin u$.

Dan geldt

$$\frac{1}{c + \varepsilon d} = \frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2}.$$

Immers $c - \varepsilon d = C(\cos u - \varepsilon \sin u)$ en $C(\cos u + \varepsilon \sin u) \cdot (c - \varepsilon d) = c^2 + d^2 = C^2$. Dan volgt

$$\frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2} = \frac{1}{C}(\cos u - \varepsilon \sin u) = \frac{1}{C}(\cos(-u) + \varepsilon \sin(-u)) = \frac{1}{c + \varepsilon d}$$

volgens de gevonden formule. En als we dit met $a + \varepsilon b = A(\cos v + \varepsilon \sin v)$ vermenigvuldigen komt er

$$(a + \varepsilon b) \cdot \frac{c - \varepsilon d}{c^2 + d^2} = \frac{A}{C}(\cos(v - u) + \varepsilon \sin(v - u)) = \frac{a + \varepsilon b}{c + \varepsilon d}$$

Wortels

Wessel ging vervolgens op zoek naar wortels en begon met de opmerking dat als m een (positief) geheel getal is het getal $\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}$ na m keer met zichzelf vermenigvuldigen het resultaat $\cos v + \varepsilon \sin v$ oplevert. En dus, schreef Wessel, volgt dat

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}$$

Met gebruik van de delingsregels volgt dat deze formule ook geldt als m negatief is en dus vond hij dat voor alle gehele getallen m en n geldt dat

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m}v + \varepsilon \sin \frac{n}{m}v$$

Hiermee kunnen we de waarden van uitdrukkingen als $\sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}$ of $\sqrt[m]{a + \sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}}$ vinden. Zo stelt $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ een lijn van lengte 2 voor wiens hoek met de eenheid gelijk is aan 10° .

Wessel was nog niet klaar: hij merkte op dat als twee hoeken dezelfde sinussen en cosinussen hebben ze gelijk zijn of vier rechte hoeken verschillen of een (positief of negatief) veelvoud van vier rechte hoeken, en omgekeerd: als twee hoeken gelijk zijn of vier rechte hoeken verschillen, of een veelvoud van vier rechte hoeken, dan zijn hun sinussen en cosinussen gelijk.

Deze opmerking leidt tot een nauwkeurigere uitspraak over de m -demachtswortels. Laat m een geheel getal zijn en schrijf $\pi = 360^\circ$ (echt waar!).

Dan heeft $(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}$ precies de volgende m verschillende waarden: $\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}$, $\cos \frac{\pi+v}{m} + \varepsilon \sin \frac{\pi+v}{m}$, $\cos \frac{2\pi+v}{m} + \varepsilon \sin \frac{2\pi+v}{m}$, $\dots$, tot en met $\cos \frac{(m-1)\pi+v}{m} + \varepsilon \sin \frac{(m-1)\pi+v}{m}$.

Al deze m waarden hebben dezelfde m -de macht, namelijk $\cos v + \varepsilon \sin v$. Verder zijn ze allemaal verschillend omdat de hoeken onderling *minder* dan π verschillen. En ten slotte: als we door zouden tellen krijgen we vanaf m de hoeken $\pi + \frac{v}{m}$, $\pi + \frac{\pi+v}{m}$, $\pi + \frac{2\pi+v}{m}$, enzovoort, maar die leveren geen nieuwe waarden meer op omdat ze vier rechte hoeken (of een veelvoud daarvan) verschillen met één van de m die we al hebben.

Opgave 1.1.4. Laat $m \in \mathbb{N}$ (met $m \geq 2$) toon aan dat elk complexe getal α m -de machtswortels heeft en wel, als $\alpha \neq 0$, precies m verschillende.

Opgave 1.1.5. In het speciale geval $m = 2$ kun je de tweedemachtswortels ook buiten de gonioformules om bepalen. Ga na dat vergelijking $(x+yi)^2 = a+bi$ tot drie vergelijkingen voor x en y leidt:

1. $x^2 - y^2 = a$,
2. $2xy = b$, en
3. $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Los vergelijkingen 1 en 3 op naar x^2 en y^2 ; dit geeft vier potentiële oplossingen van $(x+yi)^2 = a+bi$. Volgens Wessel zijn er maar twee; hoe bepalen we welke twee van de vier overblijven?

Opgave 1.1.6. Gebruik de eerste twee vergelijkingen uit de vorige opgave om zelf het plaatje op de voorkant van dit boekje te maken.

Opgave 1.1.7. Zei H het rechterhalfvlak $\{x+yi : x > 0\}$.

a) Ga na dat $\{(x+yi)^2 : x+yi \in H\} = \mathbb{C} \setminus \{x+0i : x \leq 0\}$.

b) Ga na dat dat kwadrateren een bijectie is tussen H en deze verzameling.

De inverse van deze functie fungeert dus als een vierkantswortel.

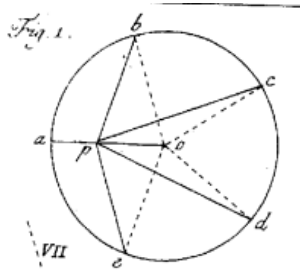
c) Waarom is deze vierkantswortel niet continu te maken op heel $\mathbb{C}$?

De stelling van Cotes

Als eerste toepassing van zijn werk bewijst Wessel een stelling die hij aan Cotes toeschrijft. In vertaling:

Stelling 1.1.8. *Als ab, bc, cd, de, ea bogen zijn (zie Figuur 1.8), n in aantal en $\frac{360}{n} = \frac{\pi}{n}$ graden bevattend, en de straal oa gelijk aan r gesteld wordt, $ao = -r$, $op = z$, $po = -z$, en p is het eindpunt van de lijnen ap, bp, cp, dp, ep : dan geldt $ap \cdot bp \cdot cp \cdot dp \cdot ep = z^n - r^n$.*

Bewijs. Uit de rekenregels volgt dat



Figuur 1.8: De stelling van Cotes

1. $ap = z - r$,
2. $bp = z - r(\cos \frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{n})$,
3. $cp = z - r(\cos \frac{2\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{n})$,
4. $dp = z - r(\cos \frac{3\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{3\pi}{n})$,
5. $ep = z - r(\cos \frac{4\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{4\pi}{n})$, of
6. $ep = z - r(\cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{n-1\pi}{n})$.

We hebben eerder vastgesteld dat de wortels van de vergelijking $x^n - r^n = 0$ gelijk zijn aan

$$1, r(\cos \frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{n}), r(\cos \frac{2\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{n}), \dots, r(\cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon \sin \frac{n-1\pi}{n})$$

Maar dat betekent dat $z^n - r^n$ te schrijven is als $ap \cdot bp \cdot cp \cdot dp \cdot ep$. Hieruit volgt dat de lengte van $z^n - r^n$ gelijk is aan het product van de lengten van ap , bp , cp , dp , ep . $\square$

NB Vanaf nu heeft π weer de betekenis die iedereen kent.

1.1.3 Wat hebben we geleerd?

We hebben gezien dat Rafael Bombelli de moed had met vierkantswortels van negatieve getallen door te rekenen, met inachtneming van de gewone rekenregels. Hij wist hierdoor de methoden uit de *Ars Magna* van Cardano ook te laten werken als die onderweg onmogelijke tussenresultaten opleverden. Dit leidde tot de algebraïsche manier van complexe getallen invoeren die vrijwel overal gebruikt wordt: als uitdrukkingen van de vorm $a + bi$ waar we gewoon mee rekenen en onderweg telkens i^2 door -1 vervangen.

Caspar Wessel definieerde een optelling en vermenigvuldiging van gerichte lijnstukken in het platte vlak en leidde vervolgens met behulp van goniöformules de bekende algebraïsche rekenregels af. Precies omgekeerd aan hoe

het gewoonlijk bij een cursus complexe getallen toegeeft: eerst de algebra en dan de meetkundige interpretatie van, vooral, de vermenigvuldiging.

Wessels methode heeft zijn voordelen: de formule van De Moivre ligt nu voor de hand, het is meteen duidelijk hoe je hogere machtswortels moet trekken, en zonder al te veel gedoe is in te zien dat er m verschillende m -demachtswortels zijn. Meer algemeen: de wisselwerking tussen algebra en meetkunde in het platte vlak komt zo een stuk beter uit de verf.

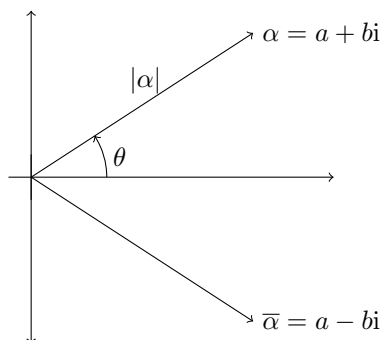
Hierbij zij nog wel opgemerkt dat Wessels aanpak naar onze maatstaven niet volledig is. Hij nam niet de moeite om na te gaan dat zijn bewerkingen aan de gewone regels voldoen: associativiteit, commutativiteit, en de distributieve wet bijvoorbeeld. De vraag is of deze gedachte wel bij hem opkwam; het idee dat van gedefinieerde bewerkingen nagegaan moet worden dat ze zich goed gedragen begon pas in de 19de eeuw post te vatten. Ik vind Wessels aanpak eigenlijk best mooi.

1.1.4 Wat afspraken

Voor we verder gaan wat afspraken over notaties.

We laten de ε van Wessel vallen en gebruiken de i als imaginaire eenheid. Dus, complexe getallen schrijven we als $a + bi$ (of $a + ib$), waarbij a en b reële getallen zijn.

Dankzij Wessels aanpak kunnen we de complexe getallen weergeven in het platte vlak, het *Complexe Vlak*. Het getal $\alpha = a + bi$ komt overeen met het punt (a, b) . In figuur 1.9 zie we de meetkundige aspecten van $a + bi$.



Figuur 1.9: Complexe getallen als punten in het platte vlak

1. de x - en y -coördinaten van het punt heten respectievelijk het *reële* en *imaginaire deel* van α , notatie: $\text{Re } \alpha = a$ en $\text{Im } \alpha = b$,

2. de afstand van het punt tot de oorsprong heet de *modulus* van α , notatie $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
3. de hoek die de plaatsvector van het punt met de *positieve* x -as maakt heet het *argument* van α , daarover hieronder meer, en
4. de gespiegelde van het punt hoort bij het complexe getal $a - bi$ dat de *complex toegevoegde* of *complex geconjugeerde* van α genoemd wordt, notatie $\bar{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$.

In de complexe context worden de x - en y -as respectievelijk de *reële* en *imaginaire as* genoemd.

Over het argument: een complex getal maak oneindig veel hoeken met de positieve reële as. Naast de hoek θ uit figuur 1.9 is voor elk geheel getal k ook $\theta + 2k\pi$ een geldige hoek, zoals Caspar Wessel al opmerkte. Dit leidt tot allerlei notationale vondsten om die veelheid aan hoeken in toom te houden. De conventie in dit hoofdstuk is dat de hoek in het interval $(-\pi, \pi]$ speciale status krijgt, we noteren die als $\text{Arg } \alpha$ en noemen hem de *hoofdwaarde van het argument*. Alle andere waarden noemen we *een argument* en die noteren we allemaal als $\arg \alpha$. NB Er zijn boeken die $[0, 2\pi)$ als hoofdwaardeinterval nemen. Hou dat bij lezing in de gaten.

Ten slotte iets over variabelen en constanten. Van Descartes hebben we de gewoonte overgenomen dat variabelen uit het eind van het alfabet komen, en constanten uit het begin. Voor complexe variabelen gebruiken we de laatste zes letters en altijd als volgt: $z = x + yi$ en $w = u + vi$. Voor complexe constanten hebben velen de toevlucht tot het begin van het Griekse alfabet gezocht: complexe getallen heten meestal $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, en hun reële en imaginaire delen $a, b, c, d, \dots$

1.2 Het Baseler probleem

Het Baseler probleem vraagt naar de waarde van de oneindige som

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

of, in moderne notatie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

De vraag werd in 1650 opgeworpen door Pietro Mengoli in *Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum*.

Dat de som eindig is was wel duidelijk en volgt door voor $n \geq 2$ de af-schatting

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

te gebruiken. De n -de partiële som is daarmee af te schatten:

$$1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

De naam *Baseler probleem* dankt het aan het feit dat de gebroeders Bernoulli (uit Basel) er aan werkten en dat Leonard Euler (ook uit Basel) het in 1735 oploste: de waarde is $\frac{\pi^2}{6}$, zie [7].

Euler's oplossing is prachtig. Door de machtreeks van $\sin x$ op slimme wijze in oneindig veel factoren te ontbinden relateerde hij de som aan de coëfficiënt van x^3 en vond zo het antwoord. Die oplossing is correct: de rechtvaardiging van de manipulaties met oneindige sommen en producten kan fraai met behulp van methoden uit de Complexe Analyse gegeven worden, maar deze kosten wat meer tijd dan we hier tot onze beschikking hebben.

Opmerking 1.2.1. In Euler's tijd keek men wat anders naar sommen van rijen dan tegenwoordig. Men ging er vanuit dat de som een waarde *moest* hebben en ging naar die waarde op zoek. Aan de hand van de redenering hierboven wist men dat de Baseler som in ieder geval niet groter dan 2 kon zijn.

In onze tijd *definiëren* we de som als de limiet van de partiële sommen *mits* die limiet bestaat. Wij interpreteren de redenering hierboven wat anders. De redenering *bewijst* dat de Baseler som bestaat omdat de rij der partiële sommen stijgend is en naar boven begrensd door 2. De volledigheid van $\mathbb{R}$ garandeert dan dat de limiet bestaat.

Een som waar wij toch iets anders tegenaan kijken dan Euler is

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \text{etc.}$$

Voor ons heeft deze geen waarde, maar Euler vond in [9] op verschillende manieren dat de waarde $0,5963473621372 \dots$ moest zijn. Zie ook [2] voor wat meer context.

Een afleiding die niet meer van de complexe getallen nodig heeft dan wat Caspar Wessel ons gaf is te vinden in de *Cours d'Analyse* van Cauchy [6], en wel aan het eind in Note VIII getiteld *Sur les Formules qui servent à convertir les Sinus ou Cosinus des Multiples d'un arc en polynomes dont*

les différens termes ont pour facteurs les puissances ascendantes du Sinus ou Cosinus de ce même arc.

De regels van vermenigvuldiging van Wessel geven ons zonder meer de bekende *formule van De Moivre*

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

We zagen dat Wessel die gebruikte bij het trekken van wortels.

Cauchy gebruikte deze formule, en het *binomium van Newton* om allerlei betrekkingen tussen $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $\cos \theta$ en $\sin \theta$ af te leiden; in het bijzonder, zoals de titel van Note VIII al zegt, polynoomuitdrukkingen voor $\cos n\theta$ en $\sin n\theta$ in zowel $\sin \theta$ als $\cos \theta$.

Het gaat de lezer al gauw duizelen, omdat Cauchy heen en weer verwijst naar allerlei formules die hij eerder, in Hoofdstuk VII, had gevonden en het volgen van de afleiding leidt tot veel terug- en vooruitbladeren in het boek. Als we ons tot het Baseler probleem beperken dan kunnen we het werk van Cauchy aanzienlijk vereenvoudigen. Wat volgt is een versie die regelmatig is herontdekt, bijvoorbeeld door de tweelingbroers A. M. Yaglom en I. M. Yaglom in [21].

We beginnen met de formule van De Moivre uit te werken:

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta \cdot i^k \sin^k \theta \end{aligned}$$

Door gelijk stellen van reële en imaginaire delen vinden we twee ‘gonioformules’:

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \cdot \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \cdot \sin^4 \theta + \dots \quad (\mathbf{cos})$$

en

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \cdot \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \cdot \sin^3 \theta + \dots \quad (\mathbf{sin})$$

We concentreren ons op de formule voor $\sin n\theta$ en delen de vergelijking door $\sin^n \theta$. Dit geeft

$$\frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta} = \binom{n}{1} \frac{\cos^{n-1} \theta}{\sin^{n-1} \theta} - \binom{n}{3} \frac{\cos^{n-3} \theta}{\sin^{n-3} \theta} + \binom{n}{5} \frac{\cos^{n-5} \theta}{\sin^{n-5} \theta} + \dots$$

We nemen n nu oneven, zeg $n = 2m + 1$, en vervangen $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ door $\cotan \theta$:

$$\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin^{2m+1} \theta} = \binom{n}{1} \cotan^{2m} \theta - \binom{n}{3} \cotan^{2m-2} \theta + \dots$$

Rechts staat een polynoom, met $\cotan^2 \theta$ ingevuld, namelijk

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} + \dots$$

Wat zijn de nulpunten van dit polynoom? Zonder de voorgeschiedenis zijn die lastig te bepalen, maar met behulp van het linkerlid hebben we ze snel te pakken. We kennen namelijk de oplossingen van de vergelijking $\sin(2m+1)\theta = 0$: de getallen $\theta_k = \frac{k}{2m+1}\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$. De noemer, $\sin^{2m+1} \theta$, mag niet nul worden, dus de veelvouden van $2m+1$ doen niet mee. De nulpunten van $p(x)$ zijn dus van de vorm

$$x_k = \cotan^2 \theta_k$$

Omdat $\cotan$ periodiek is met periode π gebruiken we alleen $k = 1$ tot en met $2m$. Verder geldt $\cotan(\pi - \theta) = -\cotan \theta$, en dus volgt $\cotan^2 \frac{k}{n}\pi = \cotan^2 \frac{n-k}{n}\pi$ voor $k = 1$ tot en met m . Omdat de graad van p gelijk is aan m hebben we hiermee alle nulpunten gevonden: de getallen x_k voor $k = 1, \dots, m$.

We kunnen $p(x)$ dus ontbinden:

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} \prod_{k=1}^m (x - x_k)$$

Als we dat weer uitvermenigvuldigen komt er

$$p(x) = \binom{2m+1}{1} (x^m - (x_1 + \dots + x_m)x^{m-1} + \dots)$$

Conclusie

$$x_1 + \dots + x_m = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m \cdot (2m-1)}{6}$$

of, iets indrukwekkender:

$$\cotan^2 \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) + \dots + \cotan^2 \left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m \cdot (2m-1)}{6}$$

Nu is dit op zich al een mooi resultaat: wie zou denken dat een aantal cotangensen zo'n eenvoudige som op kunnen leveren? Maar hoe helpt dit bij het Baseler probleem?

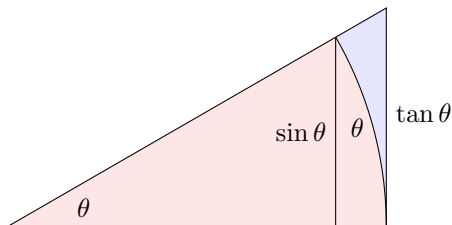
We schrijven het iets compacter op, door $2m+1$ weer door n te vervangen.

$$\cotan^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \cotan^2 \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \cotan^2 \left(\frac{m\pi}{n} \right) = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

Nu hebben we nog twee ingrediënten nodig. De eerste is een bekende ongelijkheid die geldt op het interval $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

Zie Figuur 1.10. De boog met lengte θ is langer dan de rechte lijn die



Figuur 1.10: $\sin \theta < \theta < \tan \theta$

lengte $\sin \theta$ heeft, dus $\sin \theta < \theta$.

De rode sector heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\theta$ en de blauwe driehoek heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\tan \theta$, dus $\theta < \tan \theta$.

We zetten de ongelijkheid ondersteboven:

$$\frac{1}{\sin \theta} > \frac{1}{\theta} > \cotan \theta$$

We hebben ook deze eenvoudige gonioformule nodig:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cotan^2 \theta + 1$$

De ongelijkheid impliceert dat

$$\cotan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) < \left(\frac{n}{k\pi} \right)^2 < \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right)}$$

voor alle k . De gonioformule impliceert dat

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)} + \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{2\pi}{n} \right)} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{m\pi}{n} \right)} &= \frac{(n-1)(n-2)}{6} + m \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

Met als gevolg dat

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} < \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{m\pi}\right)^2 < \frac{(n-1)(n+1)}{6}$$

Vermenigvuldig alles met π^2/n^2 , er komt

$$\frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Met de insluitstelling volgt nu dat

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

zoals gewenst.

Opgaven

Opgave 1.2.2. De laatste ongelijkheid geeft informatie over de snelheid waarmee de rij van partiële sommen naar $\frac{\pi^2}{6}$ convergeert. Ga na dat we uit de ongelijkheid kunnen concluderen dat

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{6}{2m+1} < 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{(2m+1)^2}$$

Deze afschattingen kunnen een stuk beter. Voor wie het integraalkenmerk voor reeksen bekend voorkomt: gebruik integralen om de volgende grenzen te geven

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{m} < 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{m+1}$$

Dit heeft gevolgen voor het benaderen van π met behulp van deze reeks.

1. Hoeveel termen heeft men nodig om vijf correcte decimalen (achter de komma) van $\frac{\pi^2}{6}$ te verkrijgen?
2. Hoeveel termen heeft men nodig om vijf correcte decimalen van π zelf te verkrijgen?

Opgave 1.2.3. In plaats van de formule voor $\sin n\theta$ kan men ook die voor $\cos n\theta$ gebruiken. Als men de stappen hierboven volgt vindt men de waarde van een andere oneindige som. Welke is dat, en wat is de waarde?

Opmerking 1.2.4. In de ‘gonioformule’ (**cos**) is het rechterlid geheel in machten van $\cos \theta$ uit te schrijven: omdat $\sin \theta$ alleen met even machten voorkomt kunnen we elke macht $\sin^{2k} \theta$ vervangen door $(1 - \cos^2 \theta)^k$.

Het resultaat is voor elke n een polynoom $T_n(x)$ met overal $\cos \theta$ ingevuld: $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$. De polynomen T_n heten *Chebyshevpolynomen* en komen op pagina 81 in Hoofdstuk 3 aan bod.

Opgave 1.2.5. Laat zien dat $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos \theta \cdot \cos n\theta$ en bewijs zo de recursieformule (3.3) op pagina 81.

1.3 Differentiëren en Integreren

Zaken als limieten, continuïteit, en differentieerbaarheid laten zich zonder enige aanpassing ook in het complexe vlak formuleren. Zo betekent

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \beta$$

nog steeds dat voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor elke z met $0 < |z - \alpha| < \delta$ geldt dat $|f(z) - \beta| < \varepsilon$.

Evenzo betekent “ f is continu in α ” dan dat $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha)$.

De bewijzen dat limieten van sommen/producten/quotiënten gelijk zijn aan de sommen/producten/quotiënten van de afzonderlijke limieten uit het reële geval kan men vrijwel letterlijk overschrijven om de analoge resultaten in het complexe vlak te verkrijgen.

Ik heb het nog niet over de domeinen van de functies gehad. Voor limieten en continuïteit kan elke deelverzameling als domein van functies dienst doen. In de theorie van de complexe functies gaat het om differentieerbare functies en daar zijn de domeinen altijd *open* deelverzamelingen van $\mathbb{C}$.

Definitie 1.3.1. Een deelverzameling U van $\mathbb{C}$ is *open* als voor elke $z \in U$ een $r > 0$ bestaat zó dat $B(z, r) \subseteq U$, waar $B(z, r) = \{w : |w - z| < r\}$.

Opgave 1.3.2. Ga na dat elke verzameling van de vorm $B(z, r)$ zelf open is. Zo’n verzameling noemen we wel een *open schijf*.

Opgave 1.3.3. De volgende verzamelingen worden vaak gebruikt als domein van functies: $\mathbb{C}$ zelf, de eenheidsschijf $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, het bovenhalfvlak $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ (dat is $\mathbb{C}$ minus de negatieve reële as en 0), deze laatste verzameling noteren we als $\mathbb{C}^-$. Toon aan dat deze verzamelingen open zijn.

1.3.1 Differentieerbaarheid

We beperken ons nu tot functies die gedefinieerd zijn op open verzamelingen.

Definitie 1.3.4. Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie. We zeggen dat f differentieerbaar is in $\alpha \in U$ als de limiet

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

bestaat, en die limiet noteren we dan natuurlijk als $f'(\alpha)$.

Opgave 1.3.5. Ga na dat voor elke $n \in \mathbb{Z}$ de functie $z \mapsto z^n$ differentieerbaar is in elk punt van $\mathbb{C}$, uitgezonderd 0 als n negatief is.

Niet elke ‘mooie’ functie is differentieerbaar.

Opgave 1.3.6. Bewijs dat de functie $z \mapsto \bar{z}$ in geen enkel punt differentieerbaar is.

Voor we verder gaan geven we een, voor ons, handige herformulering van de definitie van differentieerbaarheid. We bekijken het verschil

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} - f'(\alpha)$$

en werken dat om tot

$$\frac{f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha)}{z - \alpha} = \frac{f(z) - (f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha))}{z - \alpha}$$

Het verschil in de teller noteren we $r(z)$. Dan volgt: als f differentieerbaar is in α dan kunnen we schrijven

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + r(z)$$

waarbij $r(z)$ zó is dat

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{r(z)}{z - \alpha} = 0$$

Immers er staat niets anders dan

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} - f'(\alpha) = 0$$

Het omgekeerde geldt ook.

Stelling 1.3.7. Als er een getal β en een functie $r(z)$ zijn zó dat

$$f(z) = f(\alpha) + \beta(z - \alpha) + r(z)$$

en $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{r(z)}{z - \alpha} = 0$ dan is f differentieerbaar in α .

Bewijs. Werk terug en vertaal $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{r(z)}{z - \alpha} = 0$ in

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \beta \quad \square$$

Opgave 1.3.8. Bewijs met behulp van de herformulering: als f differentieerbaar is in α dan is f continu in α .

Als voorbeeld bewijzen we hiermee de kettingregel.

Stelling 1.3.9. *Laat U en V open zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ en $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ functies. Neem aan dat $\alpha \in V$ zó is dat $g(\alpha) \in U$, dat g differentieerbaar is in α , en dat f differentieerbaar is in $g(\alpha)$. Dan is de samenstelling $f \circ g$ differentieerbaar in α en $(f \circ g)'(\alpha) = f'(g(\alpha)) \cdot g'(\alpha)$.*

Bewijs. We hebben twee functies r_1 en r_2 zó dat

- $g(z) = g(\alpha) + g'(\alpha)(z - \alpha) + r_1(z)$ en $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{r_1(z)}{z - \alpha} = 0$, en
- $f(w) = f(g(\alpha)) + f'(g(\alpha))(w - g(\alpha)) + r_2(w)$ en $\lim_{w \rightarrow g(\alpha)} \frac{r_2(w)}{w - g(\alpha)} = 0$.

Voor w vullen we $g(z)$ in:

$$f(g(z)) = f(g(\alpha)) + f'(g(\alpha))(g(z) - g(\alpha)) + r_2(g(z))$$

en $g(z) - g(\alpha)$ vervangen we door $g'(\alpha)(z - \alpha) + r_1(z)$:

$$\begin{aligned} f(g(z)) &= f(g(\alpha)) + f'(g(\alpha))(g'(\alpha)(z - \alpha) + r_1(z)) + r_2(g(z)) \\ &= f(g(\alpha)) + f'(g(\alpha)) \cdot g'(\alpha)(z - \alpha) + f'(g(\alpha)) \cdot r_1(z) + r_2(g(z)) \end{aligned}$$

Dat ziet eruit als in Stelling 1.3.7 met $\beta = f'(g(\alpha)) \cdot g'(\alpha)$ en $r(z) = f'(g(\alpha)) \cdot r_1(z) + r_2(g(z))$. Rest nog te bewijzen dat $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{r(z)}{z - \alpha} = 0$.

De eerste term in $r(z)$ geeft geen probleem: $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f'(g(\alpha)) \cdot r_1(z)}{z - \alpha} = 0$.

Voor de tweede term moeten we even de definitie gebruiken. Zij $\varepsilon > 0$, we moeten $\delta > 0$ bepalen zó dat voor elke z met $0 < |z - \alpha| < \delta$ geldt dat $\left| \frac{r_2(g(z))}{z - \alpha} \right| < \varepsilon$ of, iets overzichtelijker, $|r_2(g(z))| < \varepsilon \cdot |z - \alpha|$.

Nu weten we dat $\lim_{w \rightarrow g(\alpha)} \frac{r_2(w)}{w - g(\alpha)} = 0$. Er is dus een $\eta > 0$ zó dat voor elke w met $0 < |w - g(\alpha)| < \eta$ geldt dat $|r_2(w)| < \varepsilon \cdot |w - g(\alpha)|$.

We gebruiken dat g continu is in α en nemen $\delta > 0$ zó dat voor elke z met $0 < |z - \alpha| < \delta$ geldt dat $|g(z) - g(\alpha)| < \eta$.

We vinden: als $0 < |z - \alpha| < \delta$ dan $|r_2(g(z))| < \varepsilon \cdot |g(z) - g(\alpha)|$.

Maar $g(z) - g(\alpha) = g'(\alpha)(z - \alpha) + r_1(z)$ en dus volgt

$$|r_2(g(z))| < \varepsilon \cdot |g'(\alpha)(z - \alpha) + r_1(z)|$$

Dit lijkt nog niet voldoende, maar is het wel: we moeten alleen η wat handiger kiezen. Neem eerst ε_1 zó dat $\varepsilon_1 \cdot |g'(\alpha)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, neem η bij die ε_1 . Neem vervolgens $\delta > 0$ bij die η als boven *en ook* zó dat als $0 < |z - \alpha| < \delta$ dan ook $\varepsilon_1 \cdot |r_1(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon \cdot |z - \alpha|$.

Dan krijgen we wat we willen: als $0 < |z - \alpha| < \delta$ dan

$$\begin{aligned} |r_2(g(z))| &< \varepsilon_1 \cdot |g'(\alpha)(z - \alpha)| + \varepsilon_1 \cdot |r_1(z)| \\ &< \frac{1}{2}|z - \alpha| + \frac{1}{2}|z - \alpha| \end{aligned} \quad \square$$

Het is een goede oefening dit ook voor de andere rekenregels te doen.

Opdracht 1.3.10. Gebruik de herformulering in Stelling 1.3.7 om ook de optel-, product-, en quotiëntregels af te leiden.

Waarom hebben we geëist dat onze functies op een open verzameling gedefinieerd zijn? Dat zal in de rest van dit hoofdstuk duidelijk worden, maar één van de verschillen tussen reële en complexe differentieerbaarheid zit nu net in deze eis: in het reële geval hebben we, op zijn ergst, te maken met linker- en rechterlimieten en die zijn redelijk overzichtelijk. In het complexe geval kan z het punt α van alle kanten benaderen, en langs al die richtingen moet het differentiequotiënt dezelfde limiet hebben. Dat is een zware eis die, zoals we zullen zien, verstrekkende gevolgen heeft.

De Cauchy-Riemannvergelijkingen

Een indicatie dat complexe differentieerbaarheid iets anders is dan reële differentieerbaarheid krijgen we als we naar het reële en imaginaire deel van een functie kijken. We kunnen immers altijd $f(z)$ schrijven als $u(z) + iv(z)$, waarbij $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ en $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$.

Het blijkt, als f differentieerbaar is, dat u en v niet helemaal willekeurig kunnen zijn. Via de afspraak van Caspar Wessel dat $x + yi = (x, y)$ kunnen we f , u , en v ook als functies van x en y schrijven.

Voorbeeld 1.3.11. De functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = z^2$ wordt in termen van x en y uitgeschreven

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

Hierbij hebben we dan $u(x, y) = x^2 - y^2$ en $v(x, y) = 2xy$.

Opdracht 1.3.12. Schrijf de functies $z \mapsto z^3$ en $z \mapsto z^4$ uit in termen van x en y .

Voor de Cauchy-Riemannvergelijkingen hebben we een notie uit de theorie van functies van meer variabelen nodig, namelijk die van de partiële

afgeleiden. Die verkrijgen we door naar één variabele te differentiëren (en daarbij de andere als constant te beschouwen). Er zijn twee veelgebruikte notaties voor deze partiële afgeleiden: die met het symbool ∂ en die met subscripts. Bijvoorbeeld in het voorbeeld hierboven, met $u(x, y) = x^2 - y^2$ en $v(x, y) = 2xy$ hebben we

- $\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = u_x(x, y) = 2x$,
- $\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = u_y(x, y) = -2y$,
- $\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = v_x(x, y) = 2y$, en
- $\frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = v_y(x, y) = 2x$.

We gebruiken hier verder de notatie met subscripts omdat die wat minder werk is en minder ruimte inneemt.

Opgave 1.3.13. Bepaal $u_x(x, y)$ en $u_y(x, y)$ als $u(x, y) = x^y$.

De partiële afgeleide naar x krijgt men dus door in de x -richting te differentiëren. We kijken wat dat betekent voor de afgeleide van een differentieerbare complexe functie.

Neem een punt $\alpha = a + bi$, dan geldt $f'(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$, en z kan hierbij uit alle richtingen het punt α naderen. Als we in de x -richting naderen zien we het volgende

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = u_x(a, b) + i v_x(a, b)$$

en evenzo in de y -richting:

$$f'(\alpha) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{(y - b)i} = v_y(a, b) - i u_y(a, b)$$

NB als we verticaal naderen komt er een i in de noemer.

De conclusie is dat er een relatie tussen de partiële afgeleiden van u en v moet bestaan:

$$u_x(a, b) = v_y(a, b) \text{ en } v_x(a, b) = -u_y(a, b)$$

Dit zijn de *Cauchy-Riemannvergelijkingen*.

Hierboven is te zien dat bij kwadrateren inderdaad aan deze vergelijkingen voldaan is.

Opgave 1.3.14. Ga na dat bij de derde- en vierdemachtfuncties ook aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldaan is.

De vergelijkingen verklaren ook waarom $z \mapsto \bar{z}$ nergens differentieerbaar is: we hebben namelijk $u(x, y) = x$ en $v(x, y) = -y$, en dus $u_x = 1$ en $v_y = -1$.

En voor wie ooit een cursus Analyse met meer variabelen heeft doorlopen: een functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ is complex differentieerbaar dan en slechts dan als hij reëel differentieerbaar is en voor zijn coördinaatfuncties de Cauchy-Riemannvergelijkingen gelden.

We zullen dit later een paar keer gebruiken.

Als illustratie van de opmerking hierboven dat u en v in $f = u + iv$ niet willekeurig kunnen zijn de volgende opgave.

Opgave 1.3.15. Neem $u(x, y) = x^2 - y^2$. Bepaal *alle* functies v zó dat $u(x, y) + iv(x, y)$ een differentieerbare functie oplevert.

1.3.2 Analytische functies

Waar het in de Complexe Analyse om gaat zijn de *analytische functies*, ook wel *holomorfe* genoemd.

Definitie 1.3.16. Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie. We noemen f *analytisch* in $\alpha \in U$ als er een $r > 0$ is met $B(\alpha, r) \subseteq U$ en zó dat f differentieerbaar is in elk punt van $B(\alpha, r)$.

We zeggen dat f analytisch is op U als f analytisch is in elk punt van U .

We hadden ook kunnen zeggen dat f analytisch is op U als f differentieerbaar is in elk punt van U , maar het is belangrijk genoeg om te benadrukken dat een functie nooit analytisch is in één enkel punt.

Dankzij de rekenregels voor differentiëren weten we dat in ieder geval alle polynomen analytisch zijn op heel $\mathbb{C}$. Verder zijn alle rationale functies (quotiënten van polynomen) analytisch op heel $\mathbb{C}$ behalve in de nulpunten van hun noemers.

Voor een bewijs van de Hoofdstelling van de Algebra hebben we niet meer nodig dan dat.

De complexe e-macht

Om toch een niet-triviale analytische functie in ons repertoire te hebben bekijken we de exponentiële functie. De reële exponentiële functie, e^x of $\exp x$, kennen we. Bijvoorbeeld als som van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

of als de unieke differentieerbare functie die voldoet aan $\exp'(x) = \exp(x)$ en $\exp(0) = 1$.

Hoe maken we hier een complexe versie van? Eén manier is door terug te kijken naar Wessels definitie van de vermenigvuldiging en de daaruit voortvloeiende gelijkheid

$$(\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

Dit is precies hoe een exponentiële functie zich zou moeten gedragen. We draaien de loop van de geschiedenis een beetje om en *definiëren*

$$\exp(iy) = \cos(y) + i \sin(y)$$

en vervolgens forceren we het exponentiële gedrag door $\exp(z)$ te definiëren als

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

of in e-machtsnotatie

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y$$

Deze functie is zeker differentieerbaar in de reële zin: met $u(x, y) = e^x \cos y$ en $v(x, y) = e^x \sin y$ volgt dat $u_x = u = v_y$ en $v_x = v = -u_y$. De partiële afgeleiden van de coördinaatfuncties zijn dus continu en voldoen aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen. Conclusie: de functie is complex differentieerbaar en

$$\exp'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \exp(z)$$

Differentieerbaar, dus analytisch, en gelijk aan zijn eigen afgeleide, precies de eigenschappen die de reële exponentiële functie al vastlegden.

Opgave 1.3.17. Ga na dat functie $\exp(it)$, van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$, differentieerbaar is en $i \cdot \exp(it)$ als afgeleide heeft.

Opgave 1.3.18. Voor wie met machtreeksen kan opereren: volg in de voetsporen van Euler en bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iy)^n$$

Splits de som in een reëel en imaginair deel en laat zo zien dat

$$\exp(iy) = \cos(y) + i \sin(y)$$

de enig juiste keuze is geweest.

1.3.3 Integralen

De Complexe-Functietheorie rust op drie pijlers. De eerste hebben we gezien: de Cauchy-Riemannvergelijkingen. De tweede komt nu aan bod: de integraalstelling van Cauchy. De derde, die van de machtreeksen, komt aan het eind ter sprake.

Als $[a, b]$ een interval in $\mathbb{R}$ is en $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie, dan schrijven we $f(t) = u(t) + iv(t)$ en *definiëren* simpelweg

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \cdot \int_a^b v(t) dt$$

De officiële definitie gaat met Riemann-sommen en resulteert uiteindelijk in de hier gegeven gelijkheid als stelling.

Waar het ons echt om gaat is de integraal van een complexe functie over een kromme.

Krommen

Een *kromme* is voor ons een *continue* functie $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ die *stuksgewijs glad* is, dat wil zeggen, de afgeleide κ' bestaat en is continu overal behalve in een eindig aantal punten. In de eventuele punten waar de afgeleide niet continu is bestaan de linker- en rechterlimieten van de afgeleide wel. Dit betekent dat het interval $[a, b]$ in eindig veel deelintervallen $[a_i, b_i]$ is verdeeld waarop κ differentieerbaar is met continue afgeleide. Als gevolg hiervan kunnen we de lengte L_κ van κ bepalen als de integraal van $|\kappa'|$ over $[a, b]$. Dus $L_\kappa = \int_a^b |\kappa'(t)| dt$. Dit komt later een paar keer goed van pas.

De meeste krommen die we gaan gebruiken zullen bovendien *gesloten* zijn, dat wil zeggen hun begin- en eindpunt zijn gelijk: $\kappa(a) = \kappa(b)$.

Een paar voorbeelden.

Voorbeeld 1.3.19 (Lijnstukken). Gegeven twee punten α en β in $\mathbb{C}$ definieert $\kappa(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ een functie van $[0, 1]$ naar $\mathbb{C}$. De afgeleide κ' is constant, met waarde $\beta - \alpha$, en de beeldverzameling is het rechte lijnstuk dat α en β verbindt; dat lijnstuk noteren we vaak $[\alpha, \beta]$. De lengte van $[\alpha, \beta]$ is uiteraard gelijk aan $|\beta - \alpha|$.

Een lijnstuk is geen gesloten kromme (tenzij uiteraard $\alpha = \beta$ maar die flauwe situatie doet zich hier niet voor).

De volgende krommen zijn allemaal gesloten, en komen ook veelvuldig voor in toepassingen en bewijzen.

Voorbeeld 1.3.20 (Eenheidscirkel). De functie $\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\varepsilon(t) = \exp(it)$ is een kromme.

We hebben $\varepsilon'(t) = i \cdot \varepsilon(t)$ en de beeldverzameling is de *eenheidscirkel* $\{z : |z| = 1\}$. Omdat $|\exp(it)| = 1$ volgt dat de lengte van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π .

Voorbeeld 1.3.21 (De m -voudige eenheidscirkel). Laat $m \in \mathbb{Z}$ ongelijk aan 0 zijn en definieer $\varepsilon_m : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ door $\varepsilon_m(t) = \exp(mit)$.

We hebben $\varepsilon'_m(t) = mi \cdot \varepsilon_m(t)$ en de beeldverzameling is de eenheidscirkel $\{z : |z| = 1\}$.

Merk op dat voor verschillende waarden van m de *functies* ε_m verschillend zijn, maar de beeldverzamelingen niet. In de complexe analyse gaat het bij krommen altijd om de gegeven functie, niet om het resulterende plaatje.

Wat we wel kunnen zeggen is dat als we het beeldpunt $\varepsilon_m(t)$ volgen voor $0 \leq t \leq 2\pi$ we zullen zien dat het punt de cirkel m keer doorloopt. Voor negatieve m betekent dit $|m|$ keer in negatieve richting, met de wijzers van de (ouderwetse analoge) klok mee.

Voorbeeld 1.3.22 (Willekeurige cirkels). Als $\alpha \in \mathbb{C}$ en $r > 0$ dan definieert $\kappa_{\alpha,r}(t) = \alpha + r \cdot \exp(it)$ (met $t \in [0, 2\pi]$) ook een kromme: de cirkel om α met straal r .

Voorbeeld 1.3.23 (Driehoek). Gegeven drie punten α , β , en γ in $\mathbb{C}$ definiëren we $\kappa : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\kappa(t) = \begin{cases} \alpha + t(\beta - \alpha) & 0 \leq t \leq 1 \\ \beta + (t - 1)(\gamma - \beta) & 1 \leq t \leq 2 \\ \gamma + (t - 2)(\alpha - \gamma) & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Deze functie is echt *stuksgewijs* glad: de afgeleide bestaat en is continu, behalve in $t = 1$ en $t = 2$. De beeldverzameling is de driehoek die we vaak als $[\alpha, \beta, \gamma]$ noteren.

De integraal over een kromme

De algemene situatie is deze: we hebben een open verzameling U , een (meestal analytische) functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, en een kromme $\kappa : [a, b] \rightarrow U$.

Definitie 1.3.24. De *integraal* van f over κ is als volgt gedefinieerd.

$$\int_{\kappa} f(z) dz = \int_a^b f(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t) dt$$

Waarbij de rechterintegraal de som is van de integralen over intervallen waarop κ' continu is.

We rekenen de enige integralen uit die we echt nodig hebben.

Voorbeeld 1.3.25. Laat $k \in \mathbb{Z}$. We berekenen $\int_{\varepsilon} z^k dz$, waarbij ε de eenheidscirkel is.

Per definitie geldt

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon} z^k dz &= \int_0^{2\pi} \exp(ikt) \cdot i \exp(it) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \exp((k+1)it) \cdot i dt\end{aligned}$$

Als $k = -1$ dan staat er $\int_0^{2\pi} i dt$ en dat is gelijk aan $2\pi i$.

Als $k \neq -1$ dan staat er

$$\left[\frac{\exp((k+1)it)}{(k+1)i} \cdot i \right]_0^{2\pi}$$

en dat is gelijk aan 0.

Samengevat

$$\int_{\varepsilon} z^k dz = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

Opgave 1.3.26. Toon aan dat de uitkomsten niet veranderen als we de straal veranderen. Dus als $\kappa_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven is door $\kappa_r(t) = r \cdot \exp(it)$ dan geldt eveneens

$$\int_{\kappa_r} z^k dz = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

Opgave 1.3.27. Toon aan dat de uitkomsten ook niet veranderen als we de positie veranderen. Dus als $\kappa_{\alpha,r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven is door $\kappa_r(t) = \alpha + r \cdot \exp(it)$ dan geldt eveneens

$$\int_{\kappa_r} (z - \alpha)^k dz = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

Opgave 1.3.28. Toon nu aan: als p een polynoom is en κ een willekeurige cirkel in C dan geldt $\int_{\kappa} p(z) dz = 0$.

Tot nu toe hebben de integralen niet veel opwindende waarden opgeleverd. De volgende stelling is al een stuk interessanter.

Stelling 1.3.29. *Laat p een polynoom zijn en $\alpha \in \mathbb{C}$. Neem één van de cirkels om α , zeg $\kappa_{\alpha,r}$. Dan geldt*

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} \frac{p(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i \cdot p(\alpha)$$

Bewijs. Deel $p(z)$ door $z - \alpha$ met rest: dus $p(z) = (z - \alpha) \cdot q(z) + r(z)$, waarbij $r(z)$ lagere graad heeft dan $z - \alpha$ en dus constant is; die constante waarde is $p(\alpha)$. We zien dat $\frac{p(z)}{z - \alpha} = q(z) + \frac{p(\alpha)}{z - \alpha}$; als we dit in de integraal stoppen kom er

$$\int_{\kappa_{\alpha,r}} q(z) dz + \int_{\kappa_{\alpha,r}} \frac{p(\alpha)}{z - \alpha} dz = 0 + 2\pi i \cdot p(\alpha) \quad \square$$

Deze stelling is het simpelste geval van *Cauchy's Integraalformule*. In de praktijk gebruikt men die formule niet om functiewaarden uit te rekenen maar juist om de integralen indirect te kunnen bepalen.

De integraalformule geldt voor alle analytische functies, en het punt α hoeft niet noodzakelijk het middelpunt van de cirkel te zijn.

Om dit in te kunnen zien hebben we een paar extra eigenschappen van de integralen nodig, waaronder de algemene versie van Opgave 1.3.28. Die stelling zal het zwaarste geschut vergen.

Belangrijke afschattingen

In wat volgt zullen we een paar keer modulus van een integraal af moeten schatten.

Uit de gewone integraalrekening weten we dat voor een continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ geldt dat

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Voor een continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ geldt dit ook. Om dit in te zien nemen we $\theta = \text{Arg} \int_a^b f(t) dt$, dan is $\exp(-i\theta) \int_a^b f(t) dt$ een positief reëel

getal, en gelijk aan zowel $\left| \int_a^b f(t) dt \right|$ als $\int_a^b \operatorname{Re}(\exp(-i\theta) \cdot f(t)) dt$. Dus

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \int_a^b \operatorname{Re}(\exp(-i\theta) \cdot f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |\exp(-i\theta) \cdot f(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

Een belangrijk gevolg is nu dat voor een continue functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ en een kromme $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de volgende ongelijkheid geldt.

$$\left| \int_{\kappa} f(z) dz \right| \leq M \cdot L_{\kappa}$$

waarbij M zó is dat $|f(z)| \leq M$ voor alle z op κ . Immers

$$\int_a^b |f(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t)| dt \leq \int_a^b M \cdot |\kappa'(t)| dt = M \cdot L_{\kappa}$$

Onthoud deze slagzin: de modulus van de integraal is kleiner dan of gelijk aan de mazimum modulus van de functiewaarden maal de lengte van de kromme.

Primitieven

We bekijken weer de algemene situatie: een functie f gedefinieerd op een open deelverzameling U van $\mathbb{C}$.

We noemen een functie $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ een *primitieve* van f als F differentieerbaar is op U en $F' = f$.

Wie Opgave 1.3.5 heeft gemaakt heeft gezien dat voor elke $n \in \mathbb{Z}$, ongelijk aan -1 , de functie $z \mapsto z^n$ een primitieve heeft, namelijk $z \mapsto \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Verder is de exponentiële functie $\exp(z)$ zijn eigen primitieve.

Het belang van de primitieven ligt in de volgende stelling.

Stelling 1.3.30. *Laat F een primitieve van de functie f zijn op de open verzameling U , en laat $\kappa : [a, b] \rightarrow U$ een kromme zijn. Dan geldt*

$$\int_{\kappa} f(z) dz = F(\kappa(b)) - F(\kappa(a))$$

De integraal hangt dus alleen van het begin- en eindpunt van de kromme af.

Bewijs. Schrijf $F = U + iV$ en $f = u + iv$; we hebben bij het afleiden van de Cauchy-Riemannvergelijkingen gezien dat we F' kunnen schrijven als $U_x + iV_x$ en als $V_y - iU_y$. Dit heeft hier het gevolg dat $u = U_x = V_y$ en $v = V_x = -U_y$.

Schrijf ook $\kappa(t) = x(t) + iy(t)$. Dan kunnen we de integrand in Definitie 1.3.24 als volgt uitschrijven

$$\begin{aligned} f(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t) &= (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t)) \\ &= (u \cdot x' - v \cdot y') + i(v \cdot x' + u \cdot y') \end{aligned}$$

waarbij in de laatste regel zoveel mogelijk haakjes en t -en zijn weggelaten om de structuur duidelijk te maken.

Aan de andere kant hebben we ook

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\kappa(t)) &= \frac{d}{dt}(U(\kappa(t)) + iV(\kappa(t))) \\ &= \frac{d}{dt}(U(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t))) \\ &= (U_x \cdot x' + U_y \cdot y') + i(V_x \cdot x' + V_y \cdot y') \\ &= (u \cdot x' - v \cdot y') + i(v \cdot x' + u \cdot y') \end{aligned}$$

Bij de overstap van de tweede naar de derde regel is de reële kettingregel gebruikt.

Het resultaat is, dankzij de Hoofdstelling van de Integraalrekening,

$$\int_a^b f(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t) dt = [F(\kappa(t))]_a^b$$

hetgeen ons de gewenste formule oplevert. $\square$

Gevolg 1.3.31. *Als een functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ op U een primitieve F heeft dan geldt voor elke gesloten kromme $\kappa : [a, b] \rightarrow U$ dat $\int_\kappa f(z) dx = 0$. $\square$*

Het lijkt nu dat we, om 1.3.28 voor alle analytische functies te bewijzen, alleen nog hoeven te bewijzen dat elke analytische functie een primitieve heeft. Dat zal helaas niet gaan.

Opgave 1.3.32. Toon aan dat de functie $z \mapsto z^{-1}$ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch is, maar daar geen primitieve heeft.

Het probleem in deze opgave is dat we in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gesloten krommen kunnen tekenen met eigenschap dat de functie niet in elk punt *binnen* de kromme analytisch is.

De volgende stelling is de sleutel tot de rest van de stellingen over analytische functies en hun integralen.

Stelling 1.3.33. *Laat U een open deelverzameling zijn van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie. Laat verder $[\alpha, \beta, \gamma]$ een driehoek zijn die met zijn binnengebied geheel binnen U ligt, en κ de beschrijving als in Voorbeeld 1.3.23. Dan geldt $\int_{\kappa} f(z) dz = 0$.* $\square$

We stellen het bewijs uit tot het eind van dit hoofdstuk, maar we geven er intussen wel een mooie toepassing van.

Intermezzo: de Fresnel-integralen

De Fresnel-integralen zijn

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx \text{ en } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

en spelen een belangrijke rol in the theory van buiging en verstrooiing van licht en radiogolven. Zo ongeveer elk boek over Complexe-Functietheorie geeft een berekening van deze integralen als toepassing van de integraalstelling.

De berekening gaat veelal via de functie $f(z) = e^{iz^2}$, deze is analytisch op het hele complexe vlak en dus is zijn integraal over elke driehoek gelijk aan 0. Bij het toepassen van dit feit is het zaak de driehoeken slim te kiezen. De eerste opmerking is dat voor $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$e^{ix^2} = \cos x^2 + i \sin x^2$$

Dus als we $f(z)$ over een deel, zeg een interval $[a, b]$, van de reële as integreren, met behulp van de parametrisering $\kappa(x) = x$, vinden we

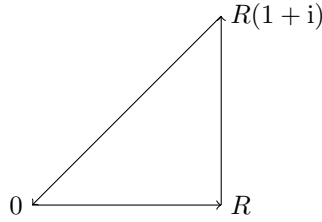
$$\int_{\kappa} e^{iz^2} dz = \int_a^b \cos x^2 + i \sin x^2 dx$$

Aangezien het ons om $\int_0^{\infty}$ gaat nemen we $a = 0$ (vast) en $b = R$ (variabel) en bekijken we $\int_{[0, R]} e^{ix^2} dx$. De keuze van een passende driehoek is na (waarschijnlijk) wat proberen gevallen op $[0, R, R(1+i)]$, zie Figuur 1.11. In plaats van één beschrijving van de driehoek parametriseren we de zijden apart en komen we zo uit op

$$\int_{[0, R, R(1+i)]} f(z) dz = \int_{[0, R]} f(z) dz + \int_{[R, R(1+i)]} f(z) dz + \int_{[R(1+i), 0]} f(z) dz$$

En op grond van Stelling 1.3.33 staat hier dus

$$0 = \int_{[0, R]} f(z) dz + \int_{[R, R(1+i)]} f(z) dz + \int_{[R(1+i), 0]} f(z) dz$$



Figuur 1.11: Driehoek voor de Fresnel-integralen

We schrijven de drie integralen uit volgens de definitie.

De eerste hebben hierboven al gezien:

$$I_1(R) = \int_{[0,R]} f(z) dz = \int_0^R \cos x^2 + i \sin x^2 dx$$

De tweede zijde beschrijven we met $R + iy$, met $0 \leq y \leq R$. Als we de tweede integraal dan uitschrijven komt er

$$I_2(R) = \int_0^R e^{i(R^2 + 2iRy - y^2)} \cdot i dy = i \int_0^R e^{-2Ry} \cdot e^{i(R^2 - y^2)} dy$$

Voor de derde zijde nemen we de volgende beschrijving: $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)x$, met $R\sqrt{2} \geq x \geq 0$ (x loopt van boven naar beneden). De derde integraal wordt dan, omdat $(\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)x)^2 = ix^2$,

$$I_3(R) = \int_{R\sqrt{2}}^0 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) dx = -\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-x^2} dx$$

Nu laten we R naar ∞ gaan. We krijgen drie dingen

We krijgen hetgeen we naar op zoek zijn:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \int_0^\infty \cos x^2 dx + i \cdot \int_0^\infty \sin x^2 dx$$

althans: we hopen dat de limiet ook echt bestaat, anders hebben we niets.

We krijgen iets bekends (voor wie de normale verdeling kent):

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} I_3(R) &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-x^2} dx \\ &= -\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Ten slotte krijgen we iets dat er nogal vervelend uitziet:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} i \cdot \int_0^R e^{-2Ry} \cdot e^{i(R^2 - y^2)} dy$$

We schatten de modulus van de integraal af (zie pagina 30):

$$\left| i \cdot \int_0^R e^{-2Ry} \cdot e^{i(R^2 - y^2)} dy \right| \leq \int_0^R e^{-2Ry} \cdot |e^{i(R^2 - y^2)}| dy = \int_0^R e^{-2Ry} dy$$

want $|e^{i(R^2 - y^2)}| = 1$. Hier kunnen we wat mee:

$$\int_0^R e^{-2Ry} dy = \left[-\frac{1}{2R} e^{-2Ry} \right]_0^R = \frac{1}{2R} (1 - e^{-2R^2})$$

Conclusie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) = 0$$

Aangezien

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) + I_2(R) + I_3(R)$$

kunnen we uit het bestaan van de limieten van I_2 en I_3 concluderen dat die van I_1 (gelukkig) ook bestaat. We vinden hiermee dat

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx + i \cdot \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{4} \sqrt{2\pi} + i \cdot \frac{1}{4} \sqrt{2\pi}$$

Terug naar de primitieven

Met behulp van Stelling 1.3.33 kunnen we laten zien dat analytische functies een primitieve hebben *mits* het domein aan bepaalde voorwaarden voldoet. Voor ons is het voldoende dat de open verzameling U stervormig is.

Definitie 1.3.34. Een open deelverzameling U van $\mathbb{C}$ is *stervormig* als er een punt α in U is zodanig dat voor elk (ander) punt β van U het lijnstuk $[\alpha, \beta]$ geheel binnen U ligt. Het punt α noemen we een *centrum* voor U .

Voorbeeld 1.3.35. Het hele complexe vlak is stervormig; een open cirkelschijf $B(\alpha, r)$ is stervormig. Het bovenhalfvlak $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ is stervormig.

In deze gevallen kan elk punt als centrum dienen.

Opgave 1.3.36. Ga na dat $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *niet* stervormig is.

Opgave 1.3.37. Ga na dat $\mathbb{C}^-$ stervormig is. Welke punten kunnen als centrum dienen?

De volgende stelling geeft ons voldoende gereedschap voor de rest van dit hoofdstuk.

Stelling 1.3.38. *Laat U een open en stervormige deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie. Dan heeft f op U een primitieve.*

Bewijs. Het bewijs is als dat van de Hoofdstelling van de Integraalrekening: we definiëren een functie $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ als volgt. Neem een centrum α voor U en definieer voor $z \in \mathbb{C}$

$$F(z) = \int_{[\alpha, z]} f(\zeta) d\zeta$$

de integraal is dus over het lijnstuk dat α en z verbindt. Neem nu $\beta \in U$ vast en $r > 0$ zó dat $B(\beta, r) \subseteq U$. We tonen aan dat $F'(\beta) = f(\beta)$.

Neem $z \in B(\beta, r)$, dan liggen alle punten op het lijnstuk $[\beta, z]$ in U , en dus ligt de hele driehoek $[\alpha, \beta, z]$ met *binnengebied* binnen U . Volgens Stelling 1.3.33 geldt dan $\int_{[\alpha, \beta, z]} f(\zeta) d\zeta = 0$. Maar

$$\begin{aligned} \int_{[\alpha, \beta, z]} f(\zeta) d\zeta &= \int_{[\alpha, \beta]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\beta, z]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z, \alpha]} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{[\alpha, \beta]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\beta, z]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[\alpha, z]} f(\zeta) d\zeta \\ &= F(\beta) + \int_{[\beta, z]} f(\zeta) d\zeta - F(z) \end{aligned}$$

Conclusie

$$F(z) = F(\beta) + \int_{[\beta, z]} f(\zeta) d\zeta$$

we kunnen de constante functie met waarde $f(\beta)$ ook over $[\beta, z]$ integreren, het resultaat is $f(\beta) \cdot (z - \beta)$. We tellen dit op bij het rechterlid en trekken het ervan af:

$$\begin{aligned} F(z) &= F(\beta) + f(\beta) \cdot (z - \beta) + \int_{[\beta, z]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[\beta, z]} f(\beta) dz \\ &= F(\beta) + f(\beta) \cdot (z - \beta) + \int_{[\beta, z]} f(\zeta) - f(\beta) d\zeta \end{aligned}$$

We hebben naar een toepassing van Stelling 1.3.7 toegewerkt. Als we kunnen laten zien dat

$$\lim_{z \rightarrow \beta} \frac{1}{z - \beta} \int_{[\beta, z]} f(z) - f(\beta) dz = 0 \quad (*)$$

volgt dat F differentieerbaar is in β met $F'(\beta) = f(\beta)$.

Pas de definitie toe op de integraal met $\kappa : [0, 1] \rightarrow U$ gedefinieerd door $\kappa(t) = \beta + t(z - \beta)$, dan geldt $\kappa'(t) = z - \beta$ en dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - \beta} \int_{[\beta, z]} f(z) - f(\beta) dz &= \frac{1}{z - \beta} \int_0^1 (f(\kappa(t)) - f(\beta)) \cdot (z - \beta) dt \\ &= \int_0^1 f(\kappa(t)) - f(\beta) dt \end{aligned}$$

Nu gebruiken we dat f continu is: gegeven $\varepsilon > 0$ kunnen we $\delta > 0$ nemen zó dat uit $|z - \beta| < \delta$ volgt dat $|f(z) - f(\beta)| < \varepsilon$. Maar dan geldt als $|\kappa(t) - \beta| < \delta$ ook dat

$$\left| \int_0^1 f(\kappa(t)) - f(\beta) dt \right| \leq \int_0^1 |f(\kappa(t)) - f(\beta)| dt < \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon$$

Dus de limiet in (*) is inderdaad gelijk aan 0. □

Nu hebben we ons eerste belangrijke hulpmiddel te pakken: de gewenste versie van Opgave 1.3.28.

Stelling 1.3.39 (De integraalstelling van Cauchy). *Als U een stervormige open deelverzameling van $\mathbb{C}$ is, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie, en $\kappa : [0, 1] \rightarrow U$ een gesloten kromme, dan geldt $\int_{\kappa} f(z) dz = 0$.*

De Hoofdstelling van de Algebra

We gaan de stelling van Cauchy meteen toepassen en de Hoofdstelling van de Algebra bewijzen.

Stelling 1.3.40 (Hoofdstelling van de Algebra). *Laat p een polynoom zijn met complexe coëfficiënten van graad 1 of hoger. Dan is er een complex getal z zó dat $p(z) = 0$.*

Voor we aan het bewijs beginnen maken we een paar opmerkingen. We schrijven

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Hierbij zijn de a_i dus complexe getallen, n een natuurlijk getal ongelijk aan 0, en $a_n \neq 0$.

Als $n = 1$ zijn we klaar: $p(z) = 0$ heeft een oplossing: $z = -a_0 a_1^{-1}$.

Als $n = 2$ zijn we ook klaar; de Mesopotamiërs wisten al hoe men een tweedegraadsvergelijking oplost. Niet met behulp van de *abc*-formule, maar door middel van kwadraat afsplitsen.

Als $n = 3$ of $n = 4$ zijn we ook klaar; de Italianen Del Ferro, Tartaglia, Cardano, en Ferrari bedachten methoden om deze vergelijkingen op te lossen, en zoals Bombelli liet zien werken deze methoden in alle gevallen, als we complexe getallen gebruiken.

Vanaf $n = 5$ laat de algebra ons in de steek: er is geen *algemene* algebraïsche formule die voor *elk* polynoom p van graad n een oplossing van de vergelijking $p(z) = 0$ oplevert.

Er is meer nodig om deze stelling te bewijzen dan alleen algebraïsche manipulaties. Het volgende bewijs, dat niet meer gebruikt dan de Integraalstelling van Cauchy voor de eenheidscirkel, is van R. P. Boas [4], ook te vinden in [5, Paragraaf 6D].

Bewijs van Stelling 1.3.40. Het bewijs gaat uit het ongerijmde. We nemen aan dat ons polynoom p geen nulpunten heeft en werken naar een tegenspraak toe.

We mogen aannemen dat $p(x) \in \mathbb{R}$ als $x \in \mathbb{R}$.

Bekijk namelijk $\bar{p}(z) = \overline{a_n}z^n + \overline{a_{n-1}}z^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}z + \overline{a_0}$. Dit is dan eveneens een polynoom zonder nulpunten. Immers $\bar{p}(z) = \overline{p(\bar{z})} \neq 0$ voor elke z .

Voor $x \in \mathbb{R}$ geldt dan $p(x) \cdot \bar{p}(x) = p(x) \cdot \overline{p(x)} = |p(x)|^2$. We kunnen dus, indien nodig, p vervangen door $p \cdot \bar{p}$.

In het bijzonder geldt voor alle $t \in \mathbb{R}$ dat $p(2 \cos t) \neq 0$. De functie $p(2 \cos t)$ is dus tekenvast en de integraal

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(2 \cos t)} dt$$

is ongelijk aan 0. De tegenspraak zal volgen als we laten zien dat I tegelijk ook gelijk is aan 0.

Hiertoe bekijken we de eenheidscirkel ε uit Voorbeeld 1.3.20: $\varepsilon(t) = \exp(it)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. Nu geldt dat $2 \cos t = \varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1}$. We gebruiken dit om I te schrijven als een integraal over de eenheidscirkel ε , als volgt, met gebruik van $\varepsilon'(t) = i\varepsilon(t)$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} \frac{\varepsilon'(t)}{\varepsilon'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{i\varepsilon(t) \cdot p(\varepsilon(t) + \varepsilon(t)^{-1})} \cdot \varepsilon'(t) dt \end{aligned}$$

Dit is nu net de *definitie* van

$$\int_{\varepsilon} \frac{1}{iz \cdot p(z + z^{-1})} dz$$

We bekijken $p(z + z^{-1})$ wat nauwkeuriger:

$$a_n(z + z^{-1})^n + a_{n-1}(z + z^{-1})^{n-1} + \cdots + a_1(z + z^{-1}) + a_0$$

Als we dit helemaal uitschrijven (maar dat doen we niet) krijgen we een som van opklimmende machten van z die begint bij $a_n z^{-n}$ en eindigt bij $a_n z^n$.

Als we z^{-n} buiten de haakjes halen krijgen we het product van z^{-n} en een polynoom $q(z)$ dat er als volgt uitziet: $a_n + \cdots + a_n z^{2n}$. In het bijzonder geldt $q(0) = a_n \neq 0$. Uit de gelijkheid $p(z + z^{-1}) = z^{-n} q(z)$ volgt verder dat $q(z) \neq 0$ als $z \neq 0$, dus ook q is een polynoom zonder nulpunten. We vinden dus dat

$$I = \int_{\varepsilon} \frac{1}{iz \cdot p(z + z^{-1})} dz = \int_{\varepsilon} \frac{1}{iz} \cdot \frac{z^n}{q(z)} dz = \frac{1}{i} \int_{\varepsilon} \frac{z^{n-1}}{q(z)} dz = 0$$

wegens de Integraalstelling van Cauchy. Immers: $z^{n-1}/q(z)$ is analytisch op heel $\mathbb{C}$, en de kromme ε is gesloten. $\square$

Een primitieve van z^{-1}

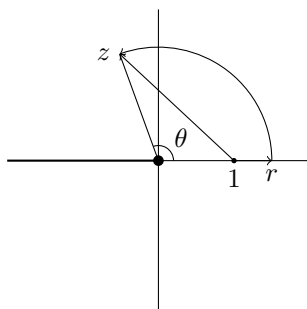
In Opgave 1.3.32 hebben we gezien dat $i : z \mapsto z^{-1}$ geen primitieve heeft op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

De open verzameling $\mathbb{C}^-$ is stervormig, en de functie i is daarop analytisch en heeft daar dus een primitieve. Hoe ziet die eruit?

Het bewijs van Stelling 1.3.38 geeft ons een methode om een primitieve te maken: neem een centrum α voor $\mathbb{C}^-$ en definieer $F(z) = \int_{[\alpha, z]} \zeta^{-1} d\zeta$. Als bijvoorbeeld we 1 als centrum nemen krijgen we dus $F(z) = \int_{[1, z]} \zeta^{-1} d\zeta$.

Opgave 1.3.41. Schrijf de definitie van $\int_{[1, z]} \zeta^{-1} d\zeta$ uit. Helpt dit?

Voor wie die integraal er te moeilijk uit vindt zien is hier een makkelijkere manier om hem uit te rekenen. Die manier berust op het feit dat we ook een andere kromme van 1 naar z mogen nemen, *zolang* die maar in $\mathbb{C}^-$ ligt. We schrijven $r = |z|$ en we nemen $\theta = \text{Arg } z$, de *hoofdwaarde* van het argument van z . We nemen als kromme van 1 naar z het lijnstukje van 1 naar r met daaraan vastgemaakt de boog van de cirkel om 0 met straal r van r naar z , noem die kromme even λ_z (zie Figuur 1.12).



Figuur 1.12: Een primitieve van z^{-1} maken

Dan geldt, omdat F een primitieve van i is, dat $F(z) = \int_{\lambda_z} z^{-1} dz$. Die laatste integraal kunnen we uitrekenen.

Het eerste stuk levert $\int_1^r x^{-1} dx = \ln r$. Het tweede stuk levert, net als in Voorbeeld 1.3.25, $\int_0^\theta i dt = i\theta$. We vinden dat

$$F(z) = \ln r + i\theta = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

Deze primitieve noteren we als $\operatorname{Log} z$ en we noemen hem de *hoofdtak van de logaritme*.

Opgave 1.3.42. Toon aan dat $\exp(\operatorname{Log} z) = z$ voor $z \in \mathbb{C}^-$.

Opgave 1.3.43. Toon aan dat $\operatorname{Log}(\exp z) = z$ voor $z \in \mathbb{C}$ met $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

De term “hoofdtak van de logaritme” suggereert dat er iets aan de hand is met de logaritme. Wat dat is wordt duidelijk als we ons de definitie van $\exp(z)$ in herinnering brengen $\exp(x + yi) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$. Die functie is periodiek want $\exp(x + yi) = \exp(x + yi + 2\pi i)$. Het gevolg is dat elke exponentiële vergelijking $\exp(z) = \alpha$ oneindig veel oplossingen heeft:

$$\ln|\alpha| + i \operatorname{Arg} \alpha + 2k\pi i$$

met $k \in \mathbb{Z}$. Dit betekent dat *de logaritme* van een complex getal niet bestaat.

Elke analytische functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ die voldoet aan $\exp(f(z)) = z$ voor alle z noemen we een *tak van de logaritme*. De functie $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ is voor velen de ‘natuurlijkste’ tak, waarschijnlijk omdat $\mathbb{C}^-$ symmetrisch is ten opzichte van de reële as en om dat Log voor de positieve reële getallen dezelfde waarde geeft als de natuurlijke logaritme.

Als $\alpha \neq 0$ dan kan men op de schijf rond α met straal $|\alpha|$ een tak van de logaritme definiëren omdat die schijf stervormig is. Maar dat zal op geen enkele schijf $B(0, r)$ rond 0 lukken, zelfs niet als je 0 weglaat; de reden is als je zo'n schijf $B(0, r)$ neemt en je potentiële logaritme f toepast op de punten op de cirkel met straal $r/2$ het volgende gebeurt: Om te beginnen geldt $f(r/2) = \ln(r/2) + 2k\pi i$ voor één of andere $k \in \mathbb{Z}$ en wegens de continuïteit geldt dan $f(re^{i\theta}) = \ln(r/2) + (\theta + 2k\pi)i$ voor elke $\theta \in (-\pi, \pi)$. Maar dat leidt tot problemen: de functie moet in $-r/2$ zowel de waarde $\ln(r/2) + (2k+1)\pi i$ als $\ln(r/2) + (2k-1)\pi i$ aannemen. De sprong van hoogte $2\pi i$ die je hier kennelijk moet maken brengt je in feite op een andere tak van de logaritme. Omdat de takken van de logaritme hier zo nauw verweven zijn noemt men 0 een vertakkingspunt van de logaritme (het is ook het enige vertakkingspunt).

In Opgave 1.1.7 is te zien dat 0 een vertakkingspunt van de vierkantswortel is.

Opgave 1.3.44. Neem $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (we laten de niet-negatieve reële getallen weg). Definieer een tak van de logaritme $\log : U \rightarrow \mathbb{C}$ die voldoet aan $\log(-1) = -\pi i$. Wat zijn dan de waarden van $\log(i)$, $\log(-i)$, $\log(-10)$, en $\log(1)$?

1.4 De Integraalformule van Cauchy

We gaan nu op weg naar de algemene versie van Stelling 1.3.29.

We beginnen met een belangrijk Lemma.

Lemma 1.4.1. *Laat U een stervormige open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn, $\alpha \in U$, en $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie die analytisch is op $U \setminus \{\alpha\}$ en continu in α . Dan heeft g een primitieve op U .*

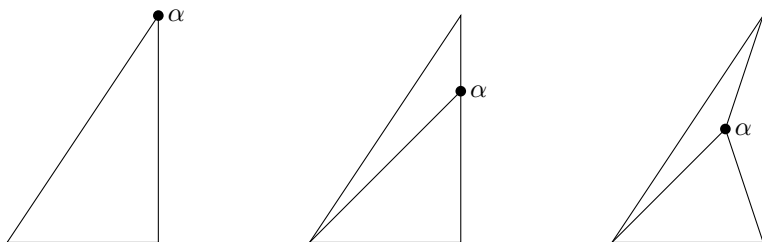
Bewijs. Om te laten zien dat g een primitieve heeft laten we zien dat voor elke driehoek κ geldt dat $\int_{\kappa} g(z) dz = 0$. Dan impliceert *het bewijs* van Stelling 1.3.39 dat g een primitieve heeft: het bewijs gebruikt namelijk alleen dat de functie continu is en dat de integraal over elke driehoek gelijk is aan 0.

Laat κ een driehoek zijn in U .

Als α buiten de driehoek ligt volgt dat $\int_{\kappa} g(z) dz = 0$ omdat de functie g analytisch is op een open driehoek (die dus stervormig is) om de beeldverzameling van κ en zijn binnengebied heen.

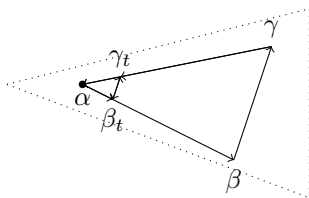
Als α op of binnen de beeldverzameling van κ ligt trekken we vanuit elk

hoekpunt van κ het rechte lijnstuk naar α . Op deze manier verdelen we de volle driehoek in één, twee, of drie driehoeken, als naar gelang α een hoekpunt is van κ , op een zijde ligt, of in het binnengebied. Zo reduceren



Figuur 1.13: α ten opzichte van de driehoek

we het probleem tot een driehoek $[\alpha, \beta, \gamma]$ waarvan α een hoekpunt is, als in Figuur 1.14. We nemen $t \in (0, 1]$ en schrijven $\beta_t = \alpha + t(\beta - \alpha)$ en



Figuur 1.14: Driehoek met hoekpunt α

$\gamma_t = \alpha + t(\gamma - \alpha)$. Er geldt

$$\begin{aligned} \int_{[\alpha, \beta, \gamma]} g(z) dz &= \int_{[\alpha, \beta_t, \gamma_t]} g(z) dz + \int_{[\beta_t, \beta, \gamma, \gamma_t]} g(z) dz \\ &= \int_{[\alpha, \beta_t, \gamma_t]} g(z) dz \end{aligned}$$

want $\int_{[\beta_t, \beta, \gamma, \gamma_t]} g(z) dz = 0$ omdat g buiten het punt α analytisch is.

De continue functie g is begrensd op de driehoek met zijn binnengebied, zeg $|g(z)| \leq M$ op de driehoek. Dus

$$\left| \int_{[\alpha, \beta_t, \gamma_t]} g(z) dz \right| \leq M \cdot \ell_t = M \cdot \ell_1 \cdot t$$

waarbij l_t de omtrek van $[\alpha, \beta_t, \gamma_t]$ is, zie de slagzin op pagina 30. De gelijkheid $\ell_t = \ell_1 \cdot t$ volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken. We zien dat $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{[\alpha, \beta_t, \gamma_t]} g(z) dz = 0$, en dus $\int_{[\alpha, \beta, \gamma]} g(z) dz = 0$. $\square$

Nu zijn we klaar om de algemene versie van Stelling 1.3.29 te bewijzen.

Stelling 1.4.2 (Integraalformule van Cauchy). *Laat U een stervormige open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie. Verder nemen we $\alpha \in U$ en $R > 0$ zó dat de cirkel $\kappa_{\alpha, R}$ binnen U ligt. Dan geldt voor elke $z \in B(\alpha, R)$ dat*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{\alpha, R}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Bewijs. We nemen $z \in B(\alpha, R)$ vast en definiëren een hulpfunctie op U :

$$g(\zeta) = \begin{cases} f'(\zeta) & \zeta = z \\ \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \end{cases}$$

Deze functie is analytisch op $U \setminus \{z\}$ (als quotiënt van twee analytische functies) en continu in z (want f is differentieerbaar in z). Dus geldt $\int_{\kappa_{\alpha, R}} g(\zeta) d\zeta = 0$, dat wil zeggen:

$$\int_{\kappa_{\alpha, R}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

ofwel

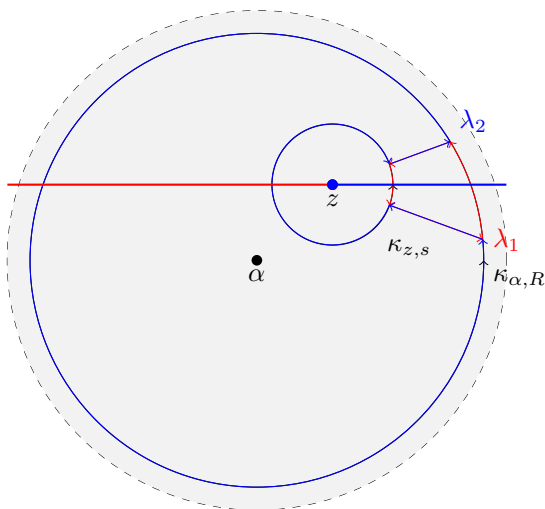
$$\int_{\kappa_{\alpha, R}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\kappa_{\alpha, R}} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{\kappa_{\alpha, R}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

Rest nog aan te tonen dat $\int_{\kappa_{\alpha, R}} (\zeta - z)^{-1} d\zeta = 2\pi i$. In het speciale geval dat $z = \alpha$ volgt dit uit Opgave 1.3.27.

Het algemene geval volgt uit het speciale geval. Neem $s = \frac{1}{2}(R - |z - \alpha|)$, dan ligt de cirkel $\kappa_{z, s}$ geheel binnen $B(\alpha, R)$. In Figuur 1.15 zijn deze krommen getekend, binnen een cirkelschijf die geheel binnen U ligt. Verder maken we twee krommen λ_1 en λ_2 als in de figuur. Voor de vier krommen geldt de volgende relatie:

$$\int_{\lambda_1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\lambda_2} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\kappa_{\alpha, R}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\kappa_{z, s}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

Immers: λ_1 en λ_2 doorlopen samen de twee andere krommen *en* de twee verbindende lijnstukjes maar dan in tegengestelde richtingen, zodat die



Figuur 1.15: De laatste stap in het bewijs

delen van de integralen tegen elkaar wegvallen. Verder doorlopen ze $\kappa_{z,s}$ in de negatieve richting, vandaar het minteken.

Verder is het complement van de rode lijn in de cirkelschijf stervormig en $(\zeta - z)^{-1}$ is daar analytisch, dus volgt $\int_{\lambda_1} (\zeta - z)^{-1} d\zeta = 0$. Idem voor de blauwe lijn en dus geldt ook $\int_{\lambda_2} (\zeta - z)^{-1} d\zeta = 0$. Conclusie

$$\int_{\kappa_{\alpha,R}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\kappa_{z,s}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \quad \square$$

Opgave 1.4.3. Gebruik de parametrizing $\kappa_{\alpha,R}(t) = \alpha + Re^{it}$ om de integraal $\int_{\kappa_{\alpha,R}} (\zeta - z)^{-1} d\zeta$ uit te schrijven. Het is daarbij handig z ook met behulp van modulus en argument te beschrijven, zeg $z = \alpha + re^{i\theta}$. Is die integraal makkelijk uit te rekenen?

Nogmaals de Hoofdstelling van de Algebra

Er zijn vele bewijzen van de Hoofdstelling van de Algebra, die elk weer steunen op een ander aspect van de Complexe-Functietheorie.

Het volgende bewijs staat in het boek [15, § 1.2] en komt oorspronkelijk uit [25].

Laat p een complex polynoom zijn. We delen p door zijn kopcoëfficiënt zodat het de volgende vorm krijgt: $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$. Haal de macht z^n buiten de haakjes en gebruikt de veelhoeksongelijkheid om te concluderen dat

$$|p(z)| \geq |z|^n (1 - |a_{n-1}|/|z| - \cdots - |a_0|/|z|^n)$$

Maar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - |a_{n-1}|/x - \cdots - |a_0|/x^n) = 1$$

Er is dus een $M > 0$ met de eigenschap dat voor $x \geq M$ geldt dat

$$1 - |a_{n-1}|/x - \cdots - |a_0|/x^n \geq \frac{1}{2}$$

en daarmee

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n$$

als $|z| \geq M$.

Stel nu dat p geen nulpunten heeft; dan definieert $q(z) = 1/p(z)$ een analytische functie op $\mathbb{C}$ met $q(0) = 1/p(0) \neq 0$. Pas nu de integraalformule toe op elke cirkel κ_R met middelpunt 0:

$$q(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_R} \frac{q(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(Re^{it}) dt$$

Maar als $R \geq M$ geldt dat $|q(Re^{it})| \leq 2R^{-n}$, en dus

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(Re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2R^{-n} dt = 2R^{-n}$$

voor $R \geq M$; maar dat kan alleen als $q(0) = 0$, tegenspraak.

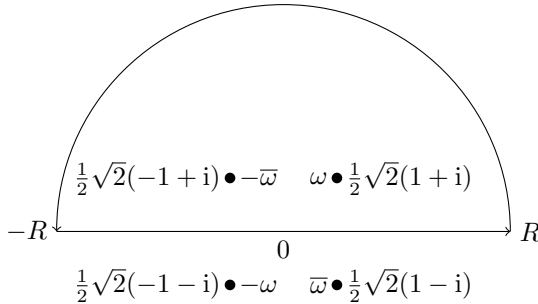
De residuenstelling

In [15] vindt men, naast bovendaand bewijs van de Hoofdstelling, van de Algebra in § 1.1 nog een andere oplossing van het Baseler probleem dan die hier gegeven is, gebaseerd op de Residuenstelling van Cauchy. Voor die stelling hebben we hier geen ruimte (hij zou de lengte van dit hoofdstuk verdubbelen) maar in de boeken [1, 5, 14, 17] wordt deze netjes uitgelegd.

De Residuenstelling wordt veel gebruikt om reële integralen op een makkelijke manier uit te rekenen. Om te laten zien hoe zoiets in het werk gaat berekenen we

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

De methode lijkt op die welke we bij de Fresnel-integralen hebben gebruikt. Voor $R > 1$ bekijken we in Figuur 1.16 de kromme κ_R die bestaat uit het



Figuur 1.16: De kromme κ_R

interval $[-R, R]$ op de reële as en de halve cirkelboog van R naar $-R$ met middelpunt 0 .

We integreren de functie $(z^4 + 1)^{-1}$ over κ , met enig beleid. De nulpunten van de noemer zijn de vier complexe getallen $\exp(\frac{\pi}{4}i)$, $\exp(\frac{3\pi}{4}i)$, $\exp(\frac{5\pi}{4}i)$, en $\exp(\frac{7\pi}{4}i)$, zoals ook gevonden door Wessel. Als we de eerste even afkorten als ω , dan hebben we dus ω , ω^3 , ω^5 , en ω^7 . Met gebruik van $\omega^8 = 1$ vinden we $\omega^7 = \omega^{-1} = \bar{\omega}$, en via $\omega^4 = -1$ vinden we $\omega^5 = -\omega$ en $\omega^3 = -\omega^{-1} = -\bar{\omega}$. Dus ons rijtje nulpunten wordt ω , $-\bar{\omega}$, $-\omega$, en $\bar{\omega}$. In Figuur 1.16 staat ze aangegeven, met hun echte waarden ook meegegeven. We kunnen met behulp van deze nulpunten de functie $(z^4 + 1)^{-1}$ breuksplitsen:

$$\frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4\omega i} \frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{4\omega i} \frac{1}{z + \omega} - \frac{1}{4\bar{\omega} i} \frac{1}{z - \bar{\omega}} + \frac{1}{4\bar{\omega} i} \frac{1}{z + \bar{\omega}}$$

De integraal van $(z^4 + 1)^{-1}$ over κ_R is dus gelijk aan de som van vier integralen. Maar κ_R ligt op en boven de reële as en daar zijn de middelste twee termen analytisch, dus

$$\int_{\kappa_R} \frac{1}{4\omega i} \frac{1}{z + \omega} dz = \int_{\kappa_R} \frac{1}{4\bar{\omega} i} \frac{1}{z - \bar{\omega}} dz = 0$$

Er blijven dus twee termen over, en die kunnen we met behulp van Voorbeeld 1.3.25 en een figuur als in het bewijs van Stelling 1.4.2 makkelijk uitrekenen:

$$\frac{1}{4\omega i} \int_{\kappa_R} \frac{1}{z - \omega} dz + \frac{1}{4\bar{\omega} i} \int_{\kappa_R} \frac{1}{z + \bar{\omega}} dz = \frac{2\pi i}{4i} (\omega^{-1} + \bar{\omega}^{-1}) = \frac{\pi}{2} \sqrt{2}$$

Conclusie:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\kappa_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{2} \sqrt{2}$$

Aan de andere kant

$$\int_{\kappa_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4 + 1} dx + \int_{\lambda_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz$$

waar λ_R de halve cirkelboog is. Op de cirkelboog geldt $|z^4 + 1| \geq R^4 - 1$, en de cirkelboog heeft lengte πR , dus

$$\left| \int_{\lambda_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1}$$

en dus

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\lambda_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = 0$$

Met als eindresultaat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2} \sqrt{2}$$

De residuenstelling is één van de beste illustraties van het citaat van Painlevé aan het begin van dit hoofdstuk. Men kan er heel veel reële integralen mee uitrekenen.

Het artikel waarin Cauchy de methode invoerde is 200 bladzijden lang en bevat al vele voorbeelden. Het artikel [3] van H. P. Boas geeft een aardige inleiding tot de methoden van Cauchy. Met een mooie integraal uit het proefschrift van zijn moeder:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Met enig genoegen vermeld hij dat noch Maple noch Mathematica in staat waren het korte antwoord $\pi^2/6$ te produceren.

1.5 Machtreeksen

We komen nu aan de derde pijler van de Complexe-Functietheorie, die van de machtreeksen. Hier lossen we nog een belofte in: laten zien hoe sterk de eis eigenlijk is dat een functie differentieerbaar is op een open verzameling.

In tegenstelling tot in het reële geval hebben we in de complexe analyse geen hiërarchie van éénmaal, tweemaal, driemaal, ..., n maal, ... differentieerbare functies. Elke analytische functie is automatisch oneindig vaak differentieerbaar en is lokaal de som van zijn Taylorreeks.

De precieze formulering van de stelling is als volgt.

Stelling 1.5.1. *Laat U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Laat verder $\alpha \in U$ en $R > 0$ zó dat $B(\alpha, R) \subseteq U$.*

Op de schijf $B(\alpha, R)$ geldt dan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$$

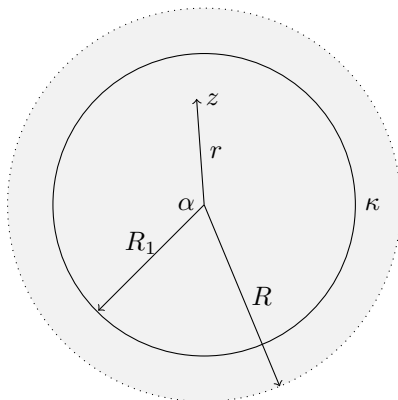
met

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

en hierbij kan κ elke cirkel zijn met middelpunt α en straal kleiner dan R .

Bewijs. Om te beginnen: op dezelfde manier als in het bewijs van Stelling 1.4.2 volgt dat de integralen in de stelling niet van de straal van de cirkel afhangen.

Daarom nemen we bij een gegeven vaste $z \in B(\alpha, R)$ een cirkel met een handige straal. We nemen R_1 tussen $r = |z - \alpha|$ en R , en laten κ de cirkel



Figuur 1.17: Een geschikte straal

met straal R_1 en middelpunt α zijn, $\kappa = \kappa_{\alpha, R_1}$ dus. Dan geldt wegens de

Integraalformule dat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Nu gaan we het quotiënt $1/(\zeta - z)$ omschrijven: in $\zeta - z = (\zeta - \alpha) - (z - \alpha)$ halen we $\zeta - \alpha$ buiten de haakjes en krijgen

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)^n$$

Dit geldt omdat de modulus van $\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}$ gelijk is aan r/R_1 en dus kleiner dan 1, in welk geval we $\left(1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}\right)^{-1}$ als som van een meetkundige reeks kunnen zien.

We mogen sommatie en integratie verwisselen:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} (z - \alpha)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta \times (z - \alpha)^n \end{aligned}$$

En daar staat de machtreeks. □

Opmerking 1.5.2. Dit bewijs werkt voor elke R met de eigenschap dat $B(\alpha, R) \subseteq U$. De maximale R die we kunnen gebruiken is gelijk aan de afstand van α tot het complement van U — als $U = \mathbb{C}$ nemen we $R = \infty$. Uit de theorie van de machtreksen volgt nu dat de reeks absoluut en uniform convergeert op elke gesloten cirkelschijf om α met straal kleiner dan de maximale R ; de *convergentiestraal* van de machtreeks is dus ten minste zo groot als die R .

Opmerking 1.5.3. In de stelling staat nog een gelijkheid, namelijk

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

Die kan men op twee manieren bewijzen.

De eerste manier gaat uit van de Integraalformule en gebruikt de regel van Leibniz voor differentiëren onder het integraalteken, toepassing daarvan op de integraalformule levert

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned}$$

De hogere afgeleiden verkrijgt men op dezelfde wijze, en na invullen van $z = \alpha$ vinden we de gelijkheden.

De tweede manier is door te bewijzen dat de som van de resulterende machtreeks differentieerbaar is en dat men de afgeleide krijgt door termsgewijs te differentiëren:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z - \alpha)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z - \alpha)^{n-1}$$

Met in het bijzonder $f'(\alpha) = a_1 \cdot 1$. Ook hier volgen de formules voor de hogere afgeleiden door herhaling van de eerste stap.

Voor wie met machtreeksen heeft leren manipuleren wordt dat laatste in de volgende opgave uitgewerkt.

Opgave 1.5.4. Neem in bovenstaande formules voor het gemak $\alpha = 0$. De machtreeks ziet er dan uit als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. De convergentiestraal noemen we R . We nemen z vast en een r met $|z| < r < R$. Verder is w variabel en voldoet aan $|w| < r$.

a) Ga na dat voor $n \geq 2$ en elke $w \in \mathbb{C}$ geldt

$$w^n - z^n = (w - z)(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})$$

b) Ga na dat $f(w) - f(z)$ te schrijven is als

$$(w - z) \cdot \left(a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}) \right)$$

c) Nog een manipulatie: tel $(n-1)z^{n-1}$ op bij hetgeen tussen de haakjes staat en trek het er weer af. Ga na dat dit resulteert in

$$nz^{n-1} + z^{n-2}(w - z) + \dots + z(w^{n-2} - z^{n-2}) + (w^{n-1} - z^{n-1})$$

d) Splits hiermee het verschil $f(w) - f(z)$ in twee delen

$$(w - z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

en

$$R(w) = (w - z)^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot (z^{n-2} + q_{n,3}(w, z) + \cdots + q_{n,n}(w, z))$$

Hierbij is $q_{n,k}$ wat overblijft na wegdelen van $w - z$ uit $z^{n-k}(w^{k-1} - z^{k-1})$, dus $q_{n,k}(w, z) = z^{n-k}(w^{k-2} + w^{k-3}z + \cdots + z^{k-2})$

- e) Toon aan dat $|q_{n,k}(w, z)| \leq (k-1)r^{k-2}$.
- f) Toon aan dat $|z^{n-2} + q_{n,3}(w, z) + \cdots + q_{n,n}(w, z)| \leq \frac{1}{2}n(n-1)r^{n-2}$
- g) Bewijs nu dat $\lim_{w \rightarrow z} R(w) \cdot (w - z)^{-1} = 0$.
- h) Pas nu Stelling 1.3.7 toe om te concluderen dat f differentieerbaar is in z en dat $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

We kunnen het werk dat we tot nu toe verricht hebben samenvatten in de volgende stelling.

Stelling 1.5.5. *Zij U een stervormige open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. f is analytisch op U ,
2. f is continu op U en $\int_{\kappa} f dz = 0$ voor elke driehoek die binnen U ligt,
3. f heeft een primitieve, en
4. f is oneindig vaak differentieerbaar en rond elk punt gelijk aan de som van zijn Taylorreeks.

En nog een keer de Hoofdstelling van de Algebra

Zoals eerder opgemerkt zijn er veel bewijzen van de Hoofdstelling van de Algebra die elk weer een ander stukje van de Complexe-Functietheorie toepassen.

Het volgende bewijs staat in vrijwel alle boeken omdat het een toepassing van een zeer interessante stelling is.

Stelling 1.5.6 (Liouville). *Als $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ een begrensde analytische functie is dan is f constant.*

Bewijs. We gebruiken de formule voor de afgeleide:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{z,R}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

waarbij $R > 0$ willekeurig is.

Omdat f begrensd is is er een $M > 0$ zó dat $|f(z)| \leq M$ voor alle z . Met behulp van “modulus maal lengte” vinden we dan, voor elke z en elke R dat

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot R^{-2} \cdot 2\pi R = M \cdot R^{-1}$$

Maar dit impliceert dat $f'(z) = 0$ voor alle z , en dus dat f constant is. $\square$

Nu kunnen we weer bewijzen dat elk polynoom van graad 1 of hoger een nulpunt heeft. Net als op pagina 45 nemen we aan dat we een polynoom van de vorm $p(z) = z^n + \dots + a_0$ hebben en bepalen we $M > 0$ zó dat $|p(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n$ als $|z| \geq M$.

Door M eventueel wat groter te maken kunnen we aannemen dat $\frac{1}{2}|z|^n > |a_0|$ als $|z| \geq M$. Op de gesloten en begrensde cirkelschijf $\{z : |z| \leq M\}$ neemt $|p(z)|$ een minimum aan, zeg in α . Dus $|p(\alpha)| \leq |p(z)|$ als $|z| \leq M$, maar dan ook $|p(\alpha)| \leq |p(0)| = |a_0| < \frac{1}{2}|z|^n \leq |p(z)|$ als $|z| \geq M$. Kortom $|p(\alpha)|$ is het absolute minimum van $|p(z)|$ op heel $\mathbb{C}$.

Dan moet gelden dat $p(\alpha) = 0$. Want als dit niet geldt is $p(z)^{-1}$ analytisch op $\mathbb{C}$ en bovendien begrensd want $|p(z)^{-1}| \leq |p(\alpha)^{-1}|$ voor alle z . Maar dan zou $p(z)^{-1}$, en dus ook $p(z)$ zelf, constant zijn, tegenspraak.

De exponentiële en goniometrische functies

We hebben de exponentiële functie gedefinieerd door eerst af te spreken dat $\exp(iy) = \cos y + i \sin y$ voor $y \in \mathbb{R}$ en daarna

$$\exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy)$$

te zetten. Deze functie is analytisch op $\mathbb{C}$ en gelijk aan zijn eigen afgeleide. Dankzij Stelling 1.5.1 weten we nu dat $\exp(z)$ de somfunctie is van de welbekende machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Dat is niet hoe Euler in [8, Hoofdstuk VII] (vertaling in [10]) aan deze machtreeks kwam.

Euler ging er vanuit dat exponentiële functies differentieerbaar waren en dus dat, voor een gegeven basis a en oneindig klein getal ω , de gelijkheid

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

geldt. Dit is eigenlijk Stelling 1.3.7 aan het werk met $\alpha = 0$ en $\beta = k$: Omdat ω oneindig klein is geldt $r(\omega) = 0$.

Voor elk natuurlijk getal i geldt dan

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \&c$$

Als nu z eindig is dan is $i = \frac{z}{\omega}$ oneindig groot en na wat manipulaties kwam Euler uit op

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c \text{ in infinitum}$$

Door $z = 1$ te nemen volgt er een relatie tussen a en k :

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$$

Het getal a dat bij $k = 1$ hoort is fundamenteel en Euler noemt dat e : “het symbool e drukt de som van de reeks

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c \text{ in infinitum}$$

uit”

Tegenwoordig draaien we de zaak om: we *definiëren* de belangrijke functies $\exp(z)$, $\cos(z)$, en $\sin(z)$ door hun machtreeksen:

$$\begin{aligned}\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\end{aligned}$$

Hieruit volgen, door geschikte waarden in de functies in te vullen, de gelijkheden die in vrijwel alle cursussen Complexe Getallen te vinden zijn, en nu voor *alle* $z \in \mathbb{C}$.

1. $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$,
2. $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$, en
3. $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$.

Wie bekend is met de hyperbolische functies ziet dat die eigenlijk vermomde goniofuncties zijn (of omgekeerd: de goniofuncties zijn vermomde hyperbolische functies).

1. $\cos(z) = \cosh(iz)$,
2. $\sin(z) = \frac{1}{i} \sinh(iz)$,
3. $\cosh(z) = \cos(iz)$, en
4. $\sinh(z) = \frac{1}{i} \sin(iz)$.

De vermomming is makkelijk te doorzien: ruwweg krijg je de ene soort functie uit de andere soort door die een kwartslag te draaien. De les die we hieruit trekken is dat er eigenlijk geen verschil is tussen de beide soorten functies.

Omdat de convergentiestralen van de definiërende machtreeksen oneindig zijn convergeren ze overal absoluut en zijn alle operaties geoorloofd.

Opgave 1.5.7. Toon aan dat de exponentiële functie aan de optelwet voldoet: $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$. Doe dit door zowel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \quad \text{als} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n$$

uit te schrijven en de resultaten term voor term te vergelijken.

Zodra dit gedaan is volgen de bekende gonioformules door de uitdrukkingen voor $\cos(z)$ en $\sin(z)$ die hierboven gegeven zijn te gebruiken. En hieruit kan men dan de reële en imaginaire delen van de cosinus en sinus in x en y uitdrukken.

$$\cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y$$

en

$$\sin(x+iy) = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y$$

Opgave 1.5.8. Los op: $\sin z = 4$, $\cos z = 10i$, $\exp z = -10$.

Periodiciteit Een belangrijk verschijnsel is de periodiciteit van de functies.

Wegens het altenerende karakter van de reeksen voor de sinus en cosinus geldt voor positieve reële x dat

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

Als we hier $x = 2$ invullen vinden we $-1 < \cos 2 < -\frac{1}{3}$. De cosinus heeft dus een kleinste positief nulpunt dat tussen de eerste nulpunten van $1 - \frac{1}{2}x^2$, dat is $\sqrt{2}$, en van $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$, dat is $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ ligt.

Laten we dat nulpunt even ν noemen (van ν lpunt). Dan geldt dus $\cos \nu = 0$ (en $\cos x > 0$ voor $x \in [0, \nu)$). Wegens de formule $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ volgt dan $\sin \nu = \pm 1$, maar omdat $x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$ voor positieve x volgt dat $\sin x > 0$ voor $x \in (0, \sqrt{6})$, en dus $\sin \nu = 1$.

Met behulp van de bekende optelformules voor sinus en cosinus vinden we dan

- $\cos(z + \nu) = \cos(z)\cos(\nu) - \sin(z)\sin(\nu) = -\sin(z)$, en
- $\sin(z + \nu) = \sin(z)\cos(\nu) + \cos(z)\sin(\nu) = \cos(z)$.

Door dit te herhalen vinden we $\cos(z + 2\nu) = -\cos(z)$ en $\sin(z + 2\nu) = -\sin(z)$, en $\cos(z + 4\nu) = \cos(z)$ en $\sin(z + 4\nu) = \sin(z)$.

De complexe functies $\cos z$ en $\sin z$ zijn dus periodiek (in de reële richting) met periode 4ν . Dit leidt tot de volgende *analytische* definitie van π .

Definitie 1.5.9. We definiëren $\pi = 2\nu$, waar ν het kleinste positieve nulpunt van de cosinus is.

Zo zijn de complexe sinus en cosinus dus ook periodiek met periode 2π .

Een gevolg van deze overwegingen is dat ook de exponentiële functie periodiek is. Er geldt immers

$$\exp(i(z + 2\pi)) = \cos(z + 2\pi) + i\sin(z + 2\pi) = \cos(z) + i\sin(z) = \exp(iz)$$

en dus geldt

$$\exp(2 + 2\pi i) = \exp(z) \text{ of ook } e^{z+2\pi i} = e^z$$

Zoals we al eerder opgemerkt hebben maakt dit het definiëren van, en werken met, de (natuurlijke) logaritme van complexe getallen wat ingewikkeld.

Zo heeft de vergelijking $e^z = 1$ nu oneindig veel oplossingen: $x_k = 2k\pi i$ met $k \in \mathbb{Z}$. De primitieve van z^{-1} die we op pagina 40 hebben gemaakt is maar één van de vele logaritmen die men kan definiëren. En men kan bij elke logaritmische functie (bijna) straffeloos $2\pi i$ optellen. *Bijna* straffeloos omdat men bij de complexe logaritmen lang niet altijd de bekende rekenregels terug krijgt.

Het motto is: oppassen met de logaritme.

1.6 De arctangens

Tot slot bekijken we de inverse van de tangensfunctie.

In het reële geval inverteren we de tangens op het interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, daar is deze strict stijgend, en neemt op dat interval alle reële waarden aan. De inverse functie heeft vele namen — arctangens, boogtangens, inverse tangens — en notaties: $\arctan$, bgtg , Bgtan , $\dots$, en zo nog wat variaties. Wij gebruiken $\arctan$.

Omdat de afgeleide van $\tan x$ gelijk is aan $1 + \tan^2 x$ volgt uit de inverse-functiestelling dat de afgeleide van $\arctan x$ gelijk is aan $(1 + x^2)^{-1}$.

Dit maakt het makkelijk machtreeksen voor $\arctan x$ te maken; in het bijzonder rond $x = 0$, want we weten hoe meetkundige reeksen werken

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \&c \text{ ad infinitum}$$

En dus kunnen we, rekening houdend met $\arctan 0 = 0$, termsgewijs integreren:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \&c \text{ ad infinitum}$$

Een door velen gevoeld manco van deze machtreeks is dat, hoewel de arctangens een mooie gladde functie is op heel $\mathbb{R}$, de machtreeks slechts op het interval $[-1, 1]$ convergeert.

Voor de functie $(1+x^2)^{-1}$ is het convergentieinterval slechts $(-1, 1)$, hoewel de grafiek van de functie toch wel op die van de normale verdeling lijkt, en die laatste heeft een machtreeks die overal convergeert:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n$$

Dus wat is het probleem?

Het probleem met beide functies, $(1+x^2)^{-1}$ en $\arctan x$, ligt net naast de reële as, in het complexe vlak. De functie $\exp(-\frac{1}{2}z^2)$ is analytisch op het hele complexe vlak, de functie $(1+z^2)^{-1}$ is dat niet. Immers: de noemer heeft twee nulpunten: i en $-i$. Dus ook als we niet meteen de meetkundige reeks hadden herkend dan nog hadden we van tevoren kunnen weten dat de machtreeks van $(1+z^2)^{-1}$ rond 0 convergentiestraal 1 zou gaan hebben: de afstand van 0 tot $\{i, -i\}$, want dat is het complement van de grootste open verzameling waarop $(1+z^2)^{-1}$ analytisch is, te weten $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Wat men op de reële rechte ook niet ziet is dat $(1+z^2)^{-1}$ onbegrensd is, in de buurt van die twee punten i en $-i$ dan. Er geldt namelijk

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

Dit laat zien dat de functie bij i en $-i$ een verticale ‘asymptoot’ heeft: de limiet van de modulus van $(1 + z^2)^{-1}$ voor $z \rightarrow i$ en voor $z \rightarrow -i$ is ∞ . In plaats van ‘asymptoot’ gebruikt men in de Complexe-Functietheorie de term *pool*.

De polen van $(1 + z^2)^{-1}$ hebben gevolgen voor de vorm van de arctangens zoals we nu gaan zien.

Opgave 1.6.1. Bereken $\int_{\kappa} (1 + z^2)^{-1} dz$, als κ de cirkel met straal 1 om i is, en nog een keer als κ de cirkel met straal 1 om $-i$.

Het eerste gevolg zien we nu al: $(1 + z^2)^{-1}$ heeft *geen* primitieve op de open verzameling $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Het domein van de arctangens zal kleiner moeten zijn.

De complexe tangens is (natuurlijk) gedefinieerd als het quotiënt van de sinus en de cosinus.

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{i} \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{\exp(iz) + \exp(-iz)} = \frac{1}{i} \frac{\exp(2iz) - 1}{\exp(2iz) + 1}$$

De laatste gelijkheid ontstaat door teller en noemer met $\exp(iz)$ te vermenigvuldigen. De tangens is periodiek, met periode π , dus net als in het reële geval moeten we het domein inkrimpen tot we een inverteerbare functie krijgen. We nemen hiertoe de verticale strook

$$U = \{z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$$

en we gebruiken de laatste formule voor de tangens om hiervan de beeldverzameling uit te rekenen, onderweg wordt meteen duidelijk dat de tangens op U inverteerbaar is.

We schrijven de tangens als samenstelling van een paar makkelijke functies:

$$z \mapsto 2iz \mapsto \exp(2iz) \mapsto \frac{\exp(2iz) - 1}{\exp(2iz) + 1} \mapsto \frac{1}{i} \cdot \frac{\exp(2iz) - 1}{\exp(2iz) + 1}$$

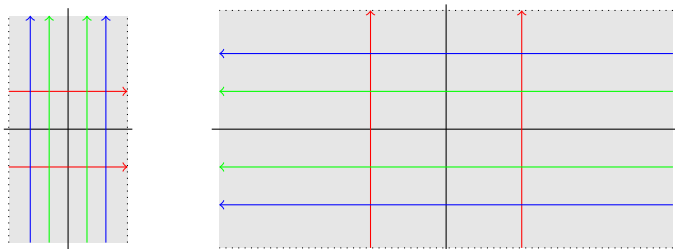
We volgen de functies stap voor stap.

De eerste is echt makkelijk, deze beeldt U af op de horizontale strook

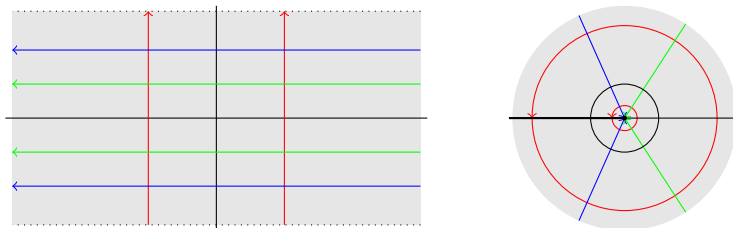
$$H = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

die hebben we al gezien in Opgave 1.3.43.

Vervolgens passen we de exponentiële functie toe en zoals we op in Opgaven 1.3.42 en 1.3.43 op pagina 40 gezien hebben beeldt deze de strook H af op het gebied $\mathbb{C}^-$. Door $\exp(z)$ in termen van x en y uit te schrijven — $\exp(x + iy) = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$ — zien we twee dingen gebeuren:



Figuur 1.18: U naar H



Figuur 1.19: H naar $\mathbb{C}^-$

- De (blauwe) horizontale lijnen (y constant) worden afgebeeld op halve lijnen vanuit 0: de eenheidsvector $\cos y + i \sin y$ wordt met alle waarden van e^x vermenigvuldigd.
- De (rode) verticale lijnen (x constant) worden afgebeeld op cirkels om 0: bij vaste x de cirkel met straal e^x .

In ons geval gaven we de lijnen een richting. De blauwe lijnen zijn gericht naar 0; de rode cirkels gaan in positieve richting, en omdat $-\pi < y < \pi$ missen we in elke cirkel het punt $-e^x$. NB De x -as wordt op de positieve x -as afgebeeld en de y -as op de eenheidscirkel.

De derde stap wordt gevormd door $M : z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$.

Opgave 1.6.2. Ga na dat deze functie inverteerbaar is door te verifiëren dat $z \mapsto \frac{z+1}{-z+1}$ de inverse M^{-1} is.

We bekijken eerst even het effect van de transformatie op $\mathbb{C}$, en kijken dan wat de rol ervan is in de tangens.

Om te beginnen: $M(-1)$ is niet gedefinieerd, maar als je $M(z)$ herschrijft als $1 - \frac{2}{z+1}$ wordt duidelijk dat de modulus van $M(z)$ naar ∞ convergeert als $z \rightarrow -1$; M heeft een pool in -1 . Andersom: ook geldt $M(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$,

dus als $|z| \rightarrow \infty$ dan $M(z) \rightarrow 1$. We maken het ons wat makkelijker en definiëren eventjes $M(-1) = \infty$ en $M(\infty) = 1$.

Vervolgens: zowel M als M^{-1} beeldt de imaginaire as af op de eenheids-cirkel, immers voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt

$$|M(iy)| = \left| \frac{iy-1}{iy+1} \right| = 1 \text{ en } |M^{-1}(iy)| = \left| \frac{iy+1}{-iy+1} \right| = 1$$

Dit kan zonder berekening want de imaginaire as is de middelloodlijn van 1 en -1 . Maar dat betekent dat M zelf de eenheidscirkel op de imaginaire as afbeeldt.

Opgave 1.6.3. Probeer dit direct aan te tonen door

$$\frac{(\cos \theta - 1) + i \sin \theta}{(\cos \theta + 1) + i \sin \theta}$$

uit te werken.

Waar beeldt M de andere cirkels om 0 op af? Dat vinden we ook uit door te kijken wat door M^{-1} op zo'n cirkel wordt afgebeeld. Neem r positief, maar ongelijk aan 1; we bepalen de z waarvoor $|M^{-1}(z)| = r$. Dat laatste is equivalent met $|z+1| = r|-z+1|$, of $|z+1|^2 = r^2|-z+1|^2$.

Opgave 1.6.4. Laat zien dat deze gelijkheid in termen van x en y uit te werken is tot

$$\left(x - \frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2r}{r^2-1}\right)^2$$

Kortom: M beeldt de cirkel om 0 met straal r af op de cirkel om $(\frac{r^2+1}{r^2-1}, 0)$, met straal $\frac{2r}{|r^2-1|}$.

Opgave 1.6.5. Toon aan dat de cirkels die bij r en r^{-1} horen symmetrisch liggen ten opzichte van de imaginaire as.

Bijvoorbeeld: het beeld van de cirkel met straal 2 heeft straal $\frac{4}{5}$ en middelpunt $(\frac{5}{3}, 0)$; die met straal $\frac{1}{2}$ geeft de cirkel met straal $\frac{4}{5}$ en middelpunt $(-\frac{5}{3}, 0)$.

We hebben tot nu toe gevolgd wat er met de horizontale (rood) en verticale (blauw) lijnen in U gebeurt. In $\mathbb{C}^-$ zijn de rode lijnen cirkels geworden en de blauwe zijn nu halve lijnen die in 0 eindigen.

Van de rode cirkels weten we nu wat er onder M mee gebeurt. Van de blauwe halve lijnen gaan we dat nu onderzoeken. Neem zo'n halve lijn; die wordt geheel bepaald door zijn hoek met de positieve x -as, we nemen die hoek, zeg θ , in het interval $(-\pi, \pi)$. Dan is de halve lijn te beschrijven

als $\ell_\theta = \{w : \text{Arg } w = \theta\}$. En het beeld van ℓ_θ onder M beschrijven we met behulp van de inverse als $M[\ell_\theta] = \{z : \text{Arg } M^{-1}(z) = \theta\}$. Met andere woorden $z \in M[\ell_\theta]$ precies dan als

$$\text{Arg} \left(\frac{z+1}{-z+1} \right) = \theta$$

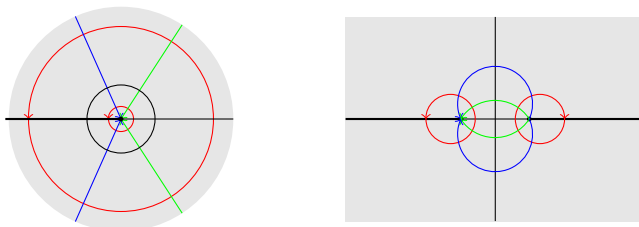
Opgave 1.6.6. Toon aan dat $M[\ell_\theta]$ een cirkelboog van 1 naar -1 is. Hint: de hoek tussen $z+1$ en $z-1$ is constant.

Ten slotte bekijken we wat er met de reële as gebeurt, en in het bijzonder met de negatieve en positieve delen ervan. De reële as wordt op zichzelf afgebeeld want $\frac{x-1}{x+1}$ is reëel als x dat is (en: $-1 \mapsto \infty$ en $\infty \mapsto 1$). Er zijn vier belangrijke intervallen te bekijken: $(\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, en $(1, \infty)$. NB we hebben maar één ∞ ; we denken ons $\mathbb{R}$ hier als een ring, aan beide kanten omgebogen zó dat ze bij dat ene ∞ samenkomen.

Merk op dat de vier grenspunten worden opgeschoven: $(\infty, -1, 0, 1) \mapsto (1, \infty, -1, 0)$. De tussenliggende intervallen ook want $M(x)$ is op elk interval stijgend.

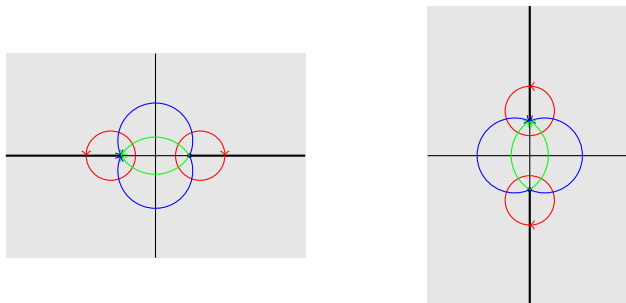
- $(\infty, -1)$ wordt afgebeeld op $(1, \infty)$,
- $(-1, 0)$ wordt afgebeeld op $(\infty, -1)$,
- $(0, 1)$ wordt afgebeeld op $(-1, 0)$, en
- $(1, \infty)$ wordt afgebeeld op $(0, 1)$.

De conclusie van dit al is dat $\mathbb{C}^-$ wordt afgedeeld op het complexe vlak *minus de intervallen* $(\infty, -1]$ en $[1, \infty)$. Dat gebied noemen we V .



Figuur 1.20: $\mathbb{C}^-$ naar V

Ten slotte moeten we V nog een kwartslag draaien om de uiteindelijke beeldverzameling W te krijgen, via $z \mapsto z/i$, een kwartslag in de negatieve richting dus, zie Figuur 1.21. De tangens beeldt de strook U dus af op W , en W is gelijk aan het complexe vlak *minus de delen* $\{iy : |y| \geq 1\}$ *van de imaginaire as*.



Figuur 1.21: V naar W

De rode horizontale lijnstukken waar we mee beginnen zijn uiteindelijk overgegaan in de rode cirkels, behalve het interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dat op de reële as wordt afgebeeld. Zo'n rood lijnstuk, van de vorm $\bar{L}_y = \{x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$, werd in de tweede stap door $\exp(iz)$ tot een cirkel met straal e^{-2y} omgebogen.

De onderste rode lijn in U hoort bij $y = -\frac{1}{2}$ en die is dus in $\mathbb{C}^-$ de cirkel om 0 met straal e geworden (de bovenste lijn is de kleine cirkel geworden, met straal e^{-1}). Door de afbeelding M wordt hij op de rechtercirkel afgebeeld, en uiteindelijk op de onderste rode cirkel in W .

Omdat we elke stap kunnen omdraaien kunnen we een formule voor de inverse van de tangens, de arctangens dus, opschrijven. Van achter naar voren

$$z \mapsto iz \mapsto M^{-1}(z) \mapsto \text{Log}(M^{-1}(z)) \mapsto \frac{1}{2i} \text{Log}(M^{-1}(z))$$

Dat kunnen we samenvatten in één mooie uitdrukking

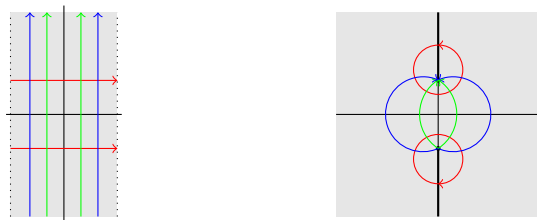
$$\arctan z = \frac{1}{2i} \text{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

De verzameling W is het maximale domein waarop deze *tak* van de arctangens analytisch te maken is. Dat is te zien aan de rode cirkels. Die hebben hun begin- en eindpunt op de imaginaire as (boven i of onder $-i$). De onderste cirkel heeft begin- en eindpunt gelijk aan $\alpha = -i \cdot \frac{e+1}{e-1}$ (reken maar na). Maar dit betekent dat we $\arctan z$ in dat punt niet continu kunnen maken. De punten dichtbij en *links* van α worden door de arctangens afgebeeld op punten van de vorm $x - \frac{1}{2}i$, met x dichtbij $-\frac{\pi}{2}$. En de punten dichtbij en rechts van α worden door de arctangens afgebeeld op punten

van de vorm $x - \frac{1}{2}i$ met x juist dichtbij $+\frac{\pi}{2}$. De limiet $\lim_{z \rightarrow \alpha} \arctan z$ bestaat dus niet.

Hetzelfde kunnen we doen voor elk punt van de vorm yi met $|y| > 1$. De punten i en $-i$ blijken dus vertakkingspunten van de arctangens te zijn.

Dit laatste voorbeeld brengt ons ook weer terug bij Riemann, en ook een beetje bij Wessel. Riemann beschouwde analytische functies vooral als afbeeldingen en keek hoe ze het complexe vlak vervormden. In Figuur 1.22



Figuur 1.22: Van U naar W

is te zien dat horizontale en verticale lijnen op cirkels afgebeeld worden, en dat die cirkels elkaar loodrecht snijden, net zoals de lijnen zelf. Dat is iets wat Riemann in zijn proefschrift al vaststelde: analytische functies bewaren alle hoeken in de volgende zin. Als $f'(\alpha) = \beta$ en $\beta \neq 0$ dan wordt elke rechte lijn door α op een kromme door $f(\alpha)$ afgebeeld. Als ℓ zo'n lijn is dan heeft de kromme $f[\ell]$ in $f(\alpha)$ een raaklijn, en die raaklijn krijgen we door op ℓ zelf de afbeelding $z \mapsto f(\alpha) + \beta \cdot (z - \alpha)$ toe te passen: vermenigvuldigen met β en dan transleren over $f(\alpha)$. En we weten dankzij Wessel dat vermenigvuldigen met β neerkomt op schalen met de factor $|\beta|$ en roteren over $\text{Arg } \beta$. En dat levert een hoektrouwe transformatie op.

Referenties

We hebben slechts het begin van de theorie van de complexe functies gezien. Wie meer wil weten kan in de volgende boeken meer leren.

1. Het boek van Aarts [1] geeft een overzichtelijke inleiding; het boek is gebaseerd op een cursus van 28 uur (1 EC) en verspilt weinig woorden aan uitwijdingen.
2. Het boek van Kortram [14] en de volgende twee in dit lijstje worden door Aarts aanbevolen voor verdere studie; het gaat verder dan het boek van Aarts.

3. Het boek van Ralph P. Boas [5] is bijna een klassieker te noemen; het is de tweede editie, herzien door de zoon: Harold P. Boas. Een rijk boek met veel opgaven en toepassingen.
 4. Het boek van Remmert [17] is ook zeer de moeite waard. Veel historische informatie en uitstapjes naar interessante klassieke resultaten. Het tweede deel [18] is ook zeer de moeite waard.
- [1] J. M. Aarts, *Complexe functies, de eerste stappen*, Epsil. Uitg., vol. 20, Utrecht: Epsilon Uitgaven, 1991.
 - [2] E. J. Barbeau, *Euler subdues a very obstreperous series*, American Mathematical Monthly **86** (1979), 356–372, DOI 10.2307/2321095. Zbl 0422.40004
 - [3] Harold P. Boas, *Cauchy's residue sore thumb*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), no. 1, 16–28, DOI 10.1080/00029890.2017.1389200. MR3756325
 - [4] R. P. Boas Jr., *Mathematical Notes: Yet Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra*, Amer. Math. Monthly **71** (1964), no. 2, 180, DOI 10.2307/2311751. MR1532530
 - [5] Ralph P. Boas, *Invitation to Complex Analysis*, 2nd ed., MAA Textbooks, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2010. Revised by Harold P. Boas. MR2674618
 - [6] Augustin-Louis Cauchy, *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. I.^{re} Partie. Analyse Algébrique*, Éditions Jacques Gabay, Jacques Gabay, 1989 (Frans). Herdruk van het origineel uit 1821.
 - [7] Leonhard Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **7** (1740), 123–134 (Latijn). Euler Archive — All Works. 41.
 - [8] ———, *Introductio in Analysin Infinitorum. Tomus Primus*, Marcum-Michaellem Bousquet, Lausannæ, 1748 (Latijn). Euler Archive — All Works. 101.
 - [9] ———, *De seriebus divergentibus*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **5** (1760), 205–237 (Latijn). Euler Archive — All Works. 247.
 - [10] ———, *Introduction to Analysis of the Infinite. Book I. Transl. by John D. Blanton*, New York etc.: Springer-Verlag, 1988. zbMATH 0657.01013
 - [11] E. Goursat, *Démonstration du théorème de Cauchy*, Acta Math. **4** (1884), no. 1, 197–200, DOI 10.1007/BF02418419 (Frans). Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. MR1554638
 - [12] ———, *Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy*, Trans. Amer. Math. Soc. **1** (1900), no. 1, 14–16, DOI 10.2307/1986398 (Frans). MR1500519
 - [13] Albert Grootendorst (ed.), *Vakantiecursus 1983: Complexe Getallen*, CWI Syllabus 15, CWI, Amsterdam, 1987.
 - [14] R. A. Kortram, *De theorie van complexe functies*, Epsil. Uitg., vol. 13, Utrecht: Epsilon Uitgaven, 1989.
 - [15] Peter D. Lax and Lawrence Zalcman, *Complex proofs of real theorems*, University Lecture Series, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR2827550
 - [16] A. Pringsheim, *Über den Goursatschen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.*, Transactions of the American Mathematical Society **2** (1901), 413–421, DOI 10.1090/S0002-9947-1901-1500576-9. zbMATH JFM 32.0308.02
 - [17] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie. 1, 3., verb. Aufl.*, Grundwissen Mathematik, vol. 5, Springer, Berlin, 1992 (Duits). zbMATH 0925.30001

- [18] ———, *Funktionentheorie*. 2, 2., korr. Aufl., Grundwissen Mathematik, vol. 6, Springer, Berlin, 1995 (Duits). zbMATH 0925.30002
- [19] Caspar Wessel, *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Oplosning*, Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter **5** (1797), 469–518 (Deens). [On the analytic representation of direction, an effort applied in particular to the determination of plane and spherical polygons].
- [20] ———, *On the analytical representation of direction: an attempt applied chiefly to solving plane and spherical polygons, 1797* (Bodil Branner and Jesper Lützen, eds.), translated by Flemming Damhus, C.A. Reitzels, Copenhagen, 1999. Vertaling van [19], met een biografie van Wessel, en een artikel over de geschiedenis van het complexe vlak.
- [21] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, *An elementary derivation of the formulas of Wallis, Leibnitz and Euler for the number π* , Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **8** (1953), no. 5(57), 181–187 (Russisch). MR0059324
- [22] ———, *Challenging mathematical problems with elementary solutions. Vol. I*, Dover Publications, Inc., New York, 1987. Combinatorial analysis and probability theory; Translated from the Russian by James McCawley, Jr.; Reprint of the 1964 edition. MR0932253
- [23] ———, *Challenging mathematical problems with elementary solutions. Vol. II*, Dover Publications, Inc., New York, 1987. Problems from various branches of mathematics; Translated from the Russian by James McCawley, Jr.; Reprint of the 1967 edition. MR0932254
- [24] Lawrence Zalcman, *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 115–137, DOI 10.2307/2976953. MR0328028
- [25] ———, *Picard's theorem without tears*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), no. 4, 265–268, DOI 10.2307/2321171. MR0481005

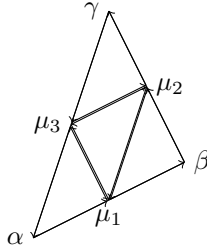
Appendix. Het bewijs van Stelling 1.3.33

We herhalen de stelling nog even.

Stelling. Laat U een open deelverzameling zijn van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een analytische functie. Laat verder $[\alpha, \beta, \gamma]$ een driehoek zijn die met zijn binnengebied geheel binnen U ligt, en κ de beschrijving als in Voorbeeld 1.3.23. Dan geldt $\int_{\kappa} f(z) dz = 0$. $\square$

Stelling 1.3.39 werd door Cauchy bewezen onder de aanname dat de afgeleide van f continu is. Goursat bewees in [11, 12] dat die aanname niet nodig was; zijn bewijs ging voor willekeurige krommen en verdeelde het binnengebied in vierkantjes. Het huidige bewijs is van Pringsheim [16], die de driehoeken centraal stelde. Dat is een verbetering ten opzichte van de vierkanten; die werken niet goed in stervormige open verzamelingen, zie het bewijs van Stelling 1.3.38.

Bewijs. We beginnen met een plaatje van de driehoek, en verdelen deze in



Figuur 1.23: De driehoek $[\alpha, \beta, \gamma]$

vier gelijkvormige driehoeken door de middens van de zijden te verbinden. Voor deze driehoeken geldt

$$\int_{[\alpha, \beta, \gamma]} f = \int_{[\alpha, \mu_1, \mu_3]} f + \int_{[\mu_1, \beta, \mu_2]} f + \int_{[\mu_3, \mu_2, \gamma]} f + \int_{[\mu_1, \mu_2, \mu_3]} f$$

en dus

$$\left| \int_{[\alpha, \beta, \gamma]} f \right| \leq \left| \int_{[\alpha, \mu_1, \mu_3]} f \right| + \left| \int_{[\mu_1, \beta, \mu_2]} f \right| + \left| \int_{[\mu_3, \mu_2, \gamma]} f \right| + \left| \int_{[\mu_1, \mu_2, \mu_3]} f \right|$$

Conclusie: voor (ten minste) één van de driehoeken, noem hem Δ_1 , geldt

$$\left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Delta_0} f(z) dz \right|$$

We gaan een rij $\langle \Delta_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ driehoeken maken en we nemen $[\alpha, \beta, \gamma]$ als de term met rangnummer 0, als Δ_0 dus. Naast de ongelijkheid voor de integralen hebben we ook een gelijkheid, namelijk $O(\Delta_1) = \frac{1}{2}O(\Delta_0)$, waar O voor ‘omtrek’ staat.

We voeren deze stap voor elke driehoek Δ_n weer uit: maak vier gelijkvormige driehoeken door de zijden te halveren en één van die vier, Δ_{n+1} genoemd, voldoet aan $\left| \int_{\Delta_{n+1}} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right|$ en natuurlijk ook aan $O(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}O(\Delta_n)$.

We krijgen zo een dalende rij $\langle \Delta_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ driehoeken-met-binnengebieden waarvan de diameters naar 0 convergeren, en met voor alle n de eigenschappen dat $4^n \cdot \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \left| \int_{\Delta_0} f(z) dz \right|$ en $O(\Delta_n) = 2^{-n}O(\Delta_0)$.

Er is dan één punt ξ in de doorsnede $\bigcap_n \Delta_n$ van de driehoeken-met-binnengebieden. Omdat f differentieerbaar is in ξ kunnen we $f(z)$ schrijven als

$$f(z) = f(\xi) + f'(\xi)(z - \xi) + r(z)$$

waarbij $\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{r(z)}{z - \xi} = 0$. Voor elke driehoek Δ_n geldt

$$\int_{\Delta_n} f(\xi) + f'(\xi)(z - \xi) dz = 0$$

omdat $f(\xi) + f'(\xi)(z - \xi)$ een *polynoom in z* is en dus een primitieve heeft. We vinden dat

$$\int_{\Delta_n} f(z) dz = \int_{\Delta_n} r(z) dz$$

voor elke n . Hiermee bewijzen we nu dat $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \int_{\Delta_n} f(z) dz = 0$, en daarmee $\int_{\Delta_0} f(z) dz = 0$.

Laat dus $\varepsilon > 0$ en neem $\delta > 0$ zó dat $\left| \frac{r(z)}{z - \xi} \right| < \varepsilon$ als $|z - \xi| < \delta$. Of, anders geformuleerd: $|r(z)| < \varepsilon \cdot |z - \xi|$ als $|z - \xi| < \delta$.

Neem nu N zo groot dat $\Delta_n \subseteq B(\xi, \delta)$ voor $n \geq N$. Neem $n \geq N$. Voor elke z op de driehoek Δ_n geldt dat $|z - \xi| \leq L(\Delta_n)$, en dus $|r(z)| < \varepsilon \cdot L(\Delta_n)$. Dankzij de slagzin over “maximum modulus maal lengte” betekent dit dat

$$\left| \int_{\Delta_n} r(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(\Delta_n) \cdot L(\Delta_n) = \varepsilon \cdot L(\Delta_n)^2$$

Maar $L(\Delta_n) = 2^{-n} L(\Delta_0)$ en dus

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta_n} r(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot 4^{-n} \cdot L(\Delta_0)^2$$

En dat is precies genoeg om te concluderen dat

$$4^n \cdot \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(\Delta_0)^2$$

Aangezien ε willekeurig was volgt nu $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \int_{\Delta_n} f(z) dz = 0$. □

2 Complexe getallen en π

Paul Levrie

2.1 Inleiding over het getal π en zijn geschiedenis

Laten we beginnen met wat meer en minder bekende feiten over π .

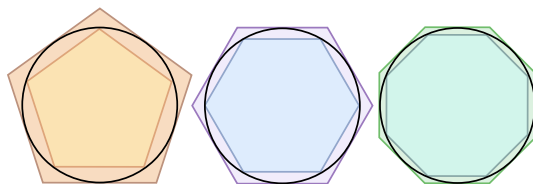
Om te beginnen de definitie: het getal π geeft de verhouding geeft van de omtrek van een cirkel tot de diameter. Of van de oppervlakte tot het kwadraat van de straal. En dat Archimedes al bewees dat deze twee formuleringen equivalent zijn.

De notatie π is minder oud dan men misschien denkt: deze notatie werd voor de eerste keer gebruikt in het boek *Synopsis Palmariorum Mathematicarum* uit (1706) (vrij vertaald: *Een nieuwe inleiding tot de wiskunde*) van William Jones (1675-1749).

And 64. or 6x $\pi = \frac{1}{2} \text{ Periphery } (\pi)$

Dat dit symbool nog steeds gebruikt wordt danken we aan de grote wiskundige Leonhard Euler (1707-1783), hij zorgde voor de verspreiding van deze notatie.

Archimedes berekende al rond het jaar 250 vóór Christus benaderingen voor het getal π . Hij deed dit door te vertrekken van een cirkel met straal 1 en de halve omtrek te berekenen van ingeschreven en omgeschreven regelmatige veelhoeken met een toenemend aantal zijden, uiteindelijk 96.



Dit leverde de afschattingen

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Het getal π wordt daarom soms ook de *constante van Archimedes* genoemd.

De methode van Archimedes was lange tijd de enige goede, omdat er nog geen *formules* waren om π mee te berekenen. Die kwamen er dan later wel: de oudste exacte uitdrukkingen waarmee je het getal π kan berekenen, zijn de volgende.

(1579) *De productformule van Viète*

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \dots$$

Deze formule is lastig om mee te rekenen.

(rond 1650) *De productformule van Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \dots$$

Deze convergeert erg traag; er zijn veel factoren nodig voor een goede benadering.

(1655) *De kettingbreuk van Lord Brouncker*

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

Deze is equivalent met het product van Wallis.

(rond 1670) *De reeks van Gregory en Leibniz.*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Deze was al rond 1400 afgeleid door de Indische wiskundige Madhava van Sangamagrama. Verder is de absolute fout kleiner dan de absolute waarde van de eerste weggelaten term.

Ludolf Van Ceulen (1540-1610), een Duitse wiskundige en rekenmeester (en schermleer) in Delft en Leiden, berekende twee maal (met de hand) een groot aantal decimalen van π . In zijn boek *Vanden Circkel* (Delft, 1596) publiceerde hij 20 decimalen van π . Later, in Leiden, berekende hij

35 decimalen. Deze heeft hij op zijn grafsteen laten beitelen; een replica van de grafsteen hangt in de Pieterskerk in Leiden.

Hij gebruikte de methode van Archimedes: door herhaald verdubbelen van het aantal zijden in regelmatige veelhoeken reduceerde hij het probleem tot herhaald worteltrekken, iets waar hij buitengewoon bedreven in was

In Duitsland was π hierom lang bekend als *Die Ludolph'sche Zahl*.

Dit werd hem nagedaan — maar niet met de methode van Archimedes — door William Shanks (1812-1882), een Brits amateur-wiskundige. Hij rekende 20 jaar aan de eerste 707 decimalen en had een vaste routine: 's morgens decimalen berekenen, 's namiddags de berekeningen checken.

Shanks had een fout gemaakt bij het 527ste cijfer na de komma, en daarmee was de rest van zijn berekeningen ook waardeloos.

De 707 decimalen berekend door Shanks zijn in 1937 op het plafond van een van de zalen van het Palais de la Découverte in Parijs aangebracht, pas in 1945 werd ontdekt dat de laatste decimalen fout waren.



De meestgebruikte formule voor de berekening van decimalen van π is de *formule van Machin*:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (2.1)$$

Ze verscheen voor het eerst in druk in 1706, zeker in het boek van William Jones waarin “ π ” voor het eerst gebruikt werd, zie Figuur 2.1.

2.2 Arctangentrelaties en π

We gaan ontdekken hoe je de formule van Machin, en vele variaties daarop, kunt maken.

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

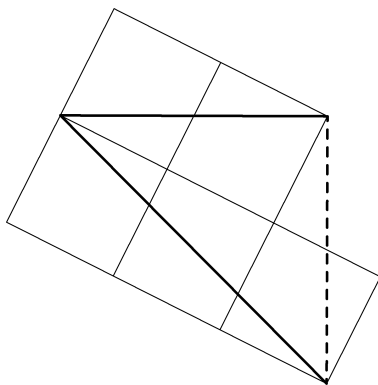
$$\frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{5} \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5} \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} - \dots, \text{ \&c.} =$$

3.14159 , &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen's* Number, or that in Art. 64. 38. may be Examin'd with all desir'd Ease and Dispatch.

Figuur 2.1: De formule van Machin bij William Jones

We beginnen met een opgave die een eenvoudige formule oplevert.

Opgave 2.2.1. Wat wordt hiermee ‘bewezen’?



Als je opmerkt dat de dikgetrokken driehoek gelijkbenig en rechthoekig is, en je denkt aan de betekenis van de tangens, dan kom je al snel uit op dit:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \quad (2.2)$$

Een dergelijke uitdrukking die het getal π geeft als een som van arctan-waarden, wordt ook wel eens een *arctangensrelatie* genoemd.

Opgave 2.2.2. Ga na dat je ook de volgende relatie uit de figuur kunt aflezen:

$$\pi = \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$$

De formule (2.1) van John Machin is ook zo'n arctangensrelatie. Deze is ideaal geschikt om decimalen van het getal π mee te berekenen met behulp van de machtreeks voor arctan:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$

(Zie ook het eerste hoofdstuk.)

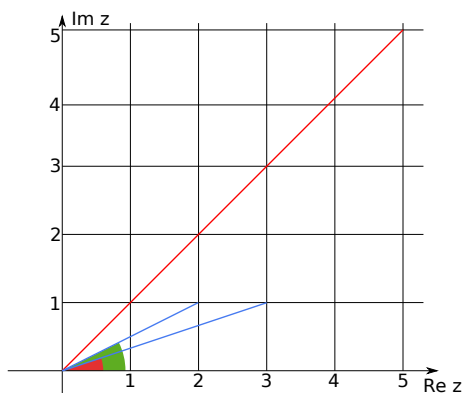
Omdat de argumenten van arctan in (2.1), $x = \frac{1}{5}$ en $x = \frac{1}{239}$, klein zijn ten opzichte van 1, heb je om 100 cijfers na de komma te berekenen van π (slechts) 71 termen nodig van de reeks voor arctan $\frac{1}{5}$ en (slechts) 22 termen van de reeks voor arctan $\frac{1}{239}$.

Maar waar we naartoe willen is het volgende: hoe bewijs je zo'n arctangensrelatie?

De rechtstreekse methode hiervoor is: pas op beide leden de tangensfunctie toe en werk uit. Als beide leden hetzelfde resultaat geven, en je kan ook bewijzen dat ze geen veelvoud van π kunnen verschillen van elkaar, dan ben je klaar. Maar het kan veel korter ...

2.3 Arctangentrelaties en complexe getallen

Om de formule (2.2) te bewijzen met behulp van complexe getallen, zetten we de belangrijkste driehoeken uit de vorige figuur uit in het complexe vlak:



We willen bewijzen dat de som van de twee gekleurde hoeken gelijk is aan $\frac{\pi}{4}$. We weten dat als we het product nemen van twee complexe getallen, dat het argument van het resultaat gelijk is aan de som van de argumenten van de factoren. De blauwe lijnstukken op de figuur geven twee complexe

getallen aan, namelijk $2+i$ en $3+i$, met argumenten respectievelijk $\arctan \frac{1}{2}$ en $\arctan \frac{1}{3}$. Als we dus het product nemen van die twee complexe getallen, dan verwachten we een complexe getal met argument $\frac{\pi}{4}$. Inderdaad:

$$(2+i)(3+i) = 5+5i.$$

We zitten op de eerste bissectrice in het eerste kwadrant, dus het argument is gelijk aan $\frac{\pi}{4}$.

Opgave 2.3.1. Welke arctangensrelatie zit in het volgende volgende product verborgen?

$$(3+i)(1-2i)$$

Opgave 2.3.2. Bewijs nu zelf de formule van Machin.

Opgave 2.3.3. Bepaal de waarde van a waarvoor

$$\arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan a = \frac{\pi}{4}$$

Tot slot dit: Stand-up wiskundige Matt Parker bracht op π -dag 2024 een hele ploeg rekenaars (400) bij elkaar om met de hand zoveel mogelijk decimalen van het getal π te berekenen. Daarvoor werd de volgende arctangensrelatie gebruikt:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & 1587 \arctan \frac{1}{2852} + 295 \arctan \frac{1}{4193} + 593 \arctan \frac{1}{4246} \\ & + 359 \arctan \frac{1}{39307} + 481 \arctan \frac{1}{55603} \\ & + 625 \arctan \frac{1}{211050} - 708 \arctan \frac{1}{390112} \end{aligned}$$

Omdat er meer dan één rekenaar was, kon het rekenwerk worden geparalleliseerd. Toch werden er maar 139 decimalen berekend. Je vraagt je misschien af: waarom zo'n ingewikkelde formule? Reden is dat hoe kleiner de getallen zijn waarvan je de arctan neemt, hoe sneller de bijhorende machtreeks convergeert, dus hoe minder termen van de machtreeks je moet berekenen.

Ondertussen weten we hoe we door een product te nemen van complexe getallen, kunnen checken of de bovenstaande formule wel juist is. Je vindt inderdaad als resultaat een complex getal van de vorm

$$a + ai$$

maar het gehele getal a hierin telt wel 19922 cijfers!

Het vinden van goede arctangensrelaties is geen eenvoudige opgave.

2.4 Complexe getallen en getaltheorie

In de vorige paragraaf werd duidelijk hoe de argumenten van complexe getallen een interessante toepassing hebben. Maar ook de moduli hebben zo'n toepassing, en wel in de getaltheorie.

Stelling 2.4.1 (Identiteit van Brahmagupta-Fibonacci).

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

Deze identiteit, die vooral voor gehele getallen a , b , c , en d interessant is, zegt je dat een product van twee sommen van twee kwadraten opnieuw te schrijven is als een som van twee kwadraten. Complexe getallen laten je toe om in één-twee-drie deze identiteit te vinden en te bewijzen. Door de definitie van de vermenigvuldiging van Caspar Wessel weten we dat de modulus van een product gelijk is aan het product van de modulussen: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. Kiezen we nu $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$, dan hebben we $|z_1|^2 = a^2 + b^2$ en $|z_2|^2 = c^2 + d^2$, en dus:

$$|z_1|^2 |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2$$

ofwel

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |(a + bi)(c + di)|^2$$

Dat laatste moeten we nu gewoon nog uitwerken:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

en dat betekent dat

$$|z_1 z_2|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Daarmee is het $(-, +)$ -deel van de identiteit bewezen.

Opgave 2.4.2. Wat moet je aanpassen in bovenstaande om het $(+, -)$ -deel te bewijzen?

Deze identiteit heeft in de wiskunde wel wat toepassingen. We geven er twee.

Vermoeden 2.4.3. Albert Girard - 1632

*ALB. GIR. Determinaſion d'un nombre qui ſe peut
diviſer en deux quarréz entiers.*

- I. Tout nombre quarré.
- II. Tout nombre premier qui excède un nombre
quaternaire de l'unité.
- III. Le produit de ceux qui ſont tels.
- IV. Et le double d'un chaſcun d'iceux.

Hier staan de getallen opgelijst die je kan schrijven als een som van twee kwadraten. Het zijn:

- De kwadraten zelf. ($a^2 = a^2 + 0^2$)
- Elk priemgetal dat één meer is dan een viervoud.
- Het product van zo'n getallen.
- En het dubbel van elk van die getallen. (want $2 = 1^2 + 1^2$)

De identiteit van Brahmagupta-Fibonacci helpt bij het begrijpen hiervan. Niet elk positief geheel is dus te schrijven als een som van twee kwadraten, maar het volgende wel:

$$629 = 23^2 + 10^2$$

Om dit te vinden is het voldoende om 629 te ontbinden in factoren ($629 = 17 \cdot 37$), en elk van de factoren te schrijven als som van twee kwadraten, en dat kan, want ze zijn allebei priem en van de vorm: een viervoud plus 1. Je kan dat in dit geval gewoon op zicht:

$$17 = 1^2 + 4^2 \text{ en } 37 = 1^2 + 6^2$$

Daarna passen we bovenstaande identiteit toe.

Stelling 2.4.4 (Pythagoras ;-). *In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.*

Zo'n driehoek uit de stelling noemen we een pythagorisch driehoek als de zijden gehele getallen zijn. De bekendste is waarschijnlijk de (3, 4, 5)-driehoek. Maar hoe vind je andere pythagorische driehoeken?

Met behulp van de identiteit van Brahmagupta-Fibonacci kan je een nieuwe genereren als je er al twee gevonden hebt: stel je hebt zulke driehoeken met zijden A_1, B_1 , en C_1 en met zijden A_2, B_2 , en C_2 (met C telkens de lengte van de schuine zijde), dan is de driehoek met rechthoekszijden $|A_1 B_2 - A_2 B_1|$ en $A_1 A_2 + B_1 B_2$ ook een pythagorische driehoek.

Opgave 2.4.5. Zie je waarom?

3 Rationale functies in het complexe vlak

Daan Huybrechs

Inleiding

Dit hoofdstuk begeleidt de lessen over rationale functies in de Nazomercursus 2025 van het Platform Wiskunde Nederland en het Platform Wiskunde Vlaanderen. De cursus is voornamelijk gericht op leerkrachten van exacte vakken en wiskunde – deze tekst dus ook. Leerlingen in het secundair onderwijs geraken vertrouwd met veeltermen, en in sommige gevallen ook een beetje met rationale functies. Tenslotte is een rationale functie gewoon het quotiënt van twee veeltermen. Misschien komt zelfs splitsen in partieelbreuken (of ‘breuksplitsing’) aan bod? Zoals we zullen zien, is dat trouwens een erg relevante operatie.

In de lessen maken we de brug van de elementaire eigenschappen van veeltermen en rationale functies tot moderne toepassingen ervan in hedendaags wetenschappelijk onderzoek. De toepassingen zelf zouden voor de leerlingen allicht wat ver reiken, maar hopelijk kan een van de voorbeelden wel ergens een plaats vinden in je onderwijs en de nieuwsgierigheid van leerlingen wekken.

Met hedendaags onderzoek denken we zeker niet alleen aan onderzoek in de wiskunde zelf. Rationale functies hebben tal van toepassingen, en vele daarvan zijn verrassend recent. We zullen benadrukken dat rationale functies, in vergelijking met veeltermen, niet-lineair zijn. Dat helpt in het begrijpen van tal van niet-lineaire fenomenen:

- Waarom kan een tram in Antwerpen zo verschrikkelijk piepen in de bochten?
- Waarom gaat een auto rammelen wanneer je in een foute versnelling rijdt?
- Wat bepaalt de klank van muziekinstrumenten zoals een gitaar?

Een volledige uitwerking van dergelijke vragen vind je in vakken van de ingenieursopleiding te Leuven zoals “Niet-lineaire systemen” of “Computergestuurde regeltechniek”. Wees gerust, zover gaan we hier niet.

In onze lessen en deze tekst gaan we wel op zoek naar de basis hiervoor in complexe getallen. In elk van de toepassingen hierboven draait alles rond

polen in het complexe vlak. Daarnaast is er een interessante geschiedenis te vertellen over de benadering van functies met behulp van veeltermen en rationale functies. In een volgende stap kan je ze gebruiken voor de benadering van dynamische systemen, zoals trams, wagens en muziekinstrumenten.

Waar kan je je aan verwachten? Volgende elementen komen aan bod:

- veeltermen zijn geschikt om een willekeurige functie $f(x)$ te benaderen
- zulke benaderingen zijn meer effectief voor sommige functies dan voor anderen
- een uitleg daarvoor vinden we in het complexe vlak
- rationale functies slagen erin om een veel bredere klasse van functies te benaderen
- de ene rationale functie is de andere niet, ook al zijn ze wiskundig gezien hetzelfde.

Het heeft enkele eeuwen geduurd om tot deze inzichten te komen! Een voorbeeld van historisch belang dat we zelf ook zullen gebruiken is de benadering van de absolute waarde functie $f(x) = |x|$. Deze functie is niet afleidbaar in het punt $x = 0$ en dat is meteen het grootste obstakel.

Laat ons tenslotte voor de zekerheid in deze inleiding nog een definitie vermelden. Rationale functies zijn het quotiënt van twee veeltermen:

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Het is gangbaar om de letter z te gebruiken voor een complexe veranderlijke $z = a + bi$, in plaats van x .

3.1 Veeltermen en veeltermbenaderingen

We laten rationale functies nog even voor wat ze zijn en beginnen het verhaal met veeltermen. Een veelterm van graad n is een functie van de vorm

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

In deze vorm doet het denken aan een machtreeks, weliswaar met slechts een eindig aantal term. De veelterm p zou inderdaad de eerste $n+1$ termen van de Taylorreeks van een functie f kunnen zijn rond het punt $x = 0$. In dat geval kan je verwachten dat p een goede benadering is voor f in de buurt van de oorsprong.

Is dat dan ook de beste veeltermbenadering van f ? Om daar een correct antwoord op te kunnen geven moeten we in principe eerst preciezer zijn over wat we bedoelen met een *goede* benadering en welk criterium we gebruiken om aan te geven dat de ene veelterm een betere benadering zou zijn dan een andere. Voor de meeste gangbare criteria is het antwoord echter negatief: er bestaan betere veeltermbenaderingen van een functie dan de afgebroken machtreeks.

De benaderbaarheid van een functie wordt in grote mate bepaald door de afleidbaarheid van de functie. Voor analytische functies, die zoals we eerder zagen oneindig maal afleidbaar zijn, wordt de beste veeltermbenadering bepaald door het gedrag in het complexe vlak. De dichtstbijzijnde pool in het complexe vlak is degene die de pret bederft.

3.1.1 Een stukje geschiedenis (met een centrale rol voor Leuven)

Het inzicht in de benaderbaarheid van functies ging gepaard met inzichten in de afleidbaarheid van functies zelf. Tot een eind in de 19e eeuw dachten vele onderzoekers, zelfs wiskundigen, dat elke continue functie ook afleidbaar was, behalve mogelijk in een beperkt aantal punten. Noties van afleidbaarheid en continuïteit waren eerder vaag. Het werkte Karl Weierstrass danig op de heupen en hij besloot om een rigoureuzere richting in te slaan. Zijn $(\epsilon - \delta)$ formulering voor limieten en continuïteit zette een hele generatie wiskundigen op een correcter spoor.

Uit correspondentie tussen Schwarz en Weierstrass blijkt dat de Leuvense wiskundige Louis-Philippe Gilbert¹ de druppel was die de emmer deed overlopen. Schwarz schrijft op 20 juni 1872 dat “*dans l’un des derniers numéros de Nouvelles Annales, un certain Gilbert, si je ne me trompe, affirme de nouveau l’absurdité qu’il est tout à fait évident qu’une fonction continue possède une dérivée*”² [2].

Het is moeilijk om dit Gilbert te hard aan te wrijven. Hij droeg op verdienstelijke wijze bij aan andere onderwerpen zoals de studie van Fresnel integralen. Leuven redde al helemaal de eer in de persoon van de meest gekende doctoraatsstudent (en neef) van Gilbert: Charles-Jean de la Vallée Poussin. De la Vallée Poussin volgde zijn oom Gilbert op in 1892 en

¹Gilbert werd geboren in 1832 en was sinds 1855 hoogleraar aan KU Leuven. In 1890 stond hij mee aan de wieg van de Faculteit Ingenieurswetenschappen, aanvankelijk met een focus op mijnbouw.

²In één van de laatste nummers van *Nouvelles Annales* bevestigt een zekere Gilbert, als ik me niet vergis, opnieuw het absurde idee dat een continue functie automatisch een afgeleide bezit.

verwierf wereldfaam in 1896 met zijn bewijs van de zogenaamde *Priemgetalstelling* over de asymptotische verdeling van priemgetallen.



Figuur 3.1: Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866–1962)

Maar we dwalen af. Het inzicht groeide dat een functie mogelijk slechts een eindig aantal afgeleiden kon bezitten. Tegenwoordig noteren we dat vaak met de verzameling $C^k([-1, 1])$: de verzameling van functies op het interval $[-1, 1]$ die k keer continu afleidbaar zijn (de k -de orde afgeleide is nog continu). Tegelijk rees de vraag of en hoe een veelterm een willekeurige continue functie f kan benaderen. De la Vallée Poussin stelde deze vraag expliciet aan zijn tijdsgenoten. Hij had zelf een veeltermbenadering opgesteld van de functie $f(x) = |x|$, die geldig was op het interval $[-1, 1]$. Laat P_n de verzameling zijn van veeltermen tot en met graad n . Het criterium voor de beste veeltermbenadering was het volgende:

$$\min_{p \in P_n} \max_{x \in [-1, 1]} |p(x) - |x||.$$

Wat is, onder alle veeltermen van graad n , degene die de maximale benaderingsfout op het interval $[-1, 1]$ minimaliseert?

Het voorbeeld $f(x) = |x|$ was niet lukraak gekozen. Deze functie is continu op $[-1, 1]$ en ze is ook afleidbaar op dat interval behalve in het punt $x = 0$. De la Vallée Poussin beseftte: als we begrijpen hoe goed veeltermen deze functie kunnen benaderen, dan begrijpen we meteen ook de beste benadering van functies in $C^k([-1, 1])$. Het volstaat bijvoorbeeld om de voorbeeldfunctie $|x|$ enkele keren te integreren om functies te genereren met

hogere afleidbaarheid. De eenvoudige functie was representatief voor een algemeen probleem.

De benadering die de la Vallée Poussin had opgesteld convergeerde niet bepaald snel. De fout gedroeg zich als een veelvoud van $\frac{1}{n}$. Kon het beter, vroeg hij? De Oekraïense wiskundige Sergei Bernstein bewees in 1912 het negatieve antwoord: geen enkele familie van veeltermbenaderingen van stijgende graad convergeert sneller dan met grootteorde $\frac{1}{n}$ [1]. Zijn artikel werd een bekroonde klassieker en verscheen in het tijdschrift van de Belgische koninklijke academie.

La meilleure approximation de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynome de degré $2n > 0$ est comprise entre $\frac{\sqrt{2}-1}{4(2n-1)}$ et $\frac{2}{\pi(2n+1)}$.

Figuur 3.2: Bernstein bewees de langzame convergentie van polynomiale benaderingen van $|x|$ in 1912 [1].

Een convergentiegedrag met orde $\frac{1}{n}$ is zeker niet praktisch. Om een benaderingsfout met zes nauwkeurige cijfers te halen heb je een veeltermgraad nodig van $n = 1\,000\,000$ (een miljoen)! De functie $f(x) = |x|$ valt niet goed te benaderen met veeltermen. De benaderingssnelheid verhoogt wel tot orde $\frac{1}{n^{k+1}}$ voor functies in $C^k([-1, 1])$. Hoe groter k , hoe beter dus, en vandaar onze uitspraak dat afleidbaarheid van een functie ook de benaderbaarheid bepaalt.

3.1.2 Veeltermbenaderingen van analytische functies

We zagen eerder al dat een analytische functie oneindig keer afleidbaar is. Hoe snel convergeren veeltermbenaderingen? De snelheid is in elk geval hoger dan orde $\frac{1}{n^{k+1}}$ voor elk natuurlijk getal k . Dat suggereert alvast goed nieuws.

De exponentiële functie e^x op het interval $[-1, 1]$ is een extreem voorbeeld. Deze blijkt verbluffend goed benaderbaar door veeltermen: de fout gedraagt zich zoals $\frac{1}{n!}$. Dat is zelfs sneller dan exponentieel³. Reeds vanaf graad $n = 15$ is de beste veeltermbenadering nauwkeurig tot op 16 cijfers, en dus op een klassieke computer niet meer te onderscheiden van de exponentiële functie zelf. Processoren rekenen immers met een eindige precisie

³De faculteitsfunctie $n!$ groeit sneller dan eender welke exponentiële functie van de vorm e^{cn} met c een constante. De uitdrukking $\frac{1}{n!}$ gaat dus sneller naar nul dan e^{-cn} voor elke positieve constante c .

en veelal is die beperkt tot 16 cijfers. Softwarebibliotheken evalueren dan ook zelden de speciale trigonometrische functies zelf: veelal evalueren zij een goed opgestelde veeltermbenadering ervan.

Analytische functies kunnen we niet van elkaar onderscheiden wanneer we enkel kijken naar de afleidbaarheid: ze zijn immers allemaal oneindig keer afleidbaar in elk punt waarin zij analytisch zijn. We kunnen wel evalueren in welk deel van het complexe vlak ze analytisch zijn. In zekere zin geldt: hoe groter het domein van analyticiteit van een functie, hoe sneller veeltermbenaderingen zullen convergeren.

De functie e^x is extreem omdat zij analytisch is in elk (eindig) punt van het complexe vlak $\mathbb{C}$. Dat noemen we een *gehele functie*⁴. De meeste analytische functies zijn echter niet geheel.

3.1.3 Benadering van functies met polen

De machtreeks als benadering

We zagen al eerder dat de functie $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ een machtreeks heeft met convergentiestraal $R = 1$. De reden hiervoor, concludeerden we, zijn de *polen* in de punten $+i$ en $-i$.

Laat ons dat toch even verder in detail bekijken. Een afgebroken machtreeks is immers een veelterm. De Taylorreeks van f rond $z = 0$ is

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}, \quad |z| < 1.$$

Indien $|z| < 1$ worden de termen z^{2k} snel kleiner bij stijgende k , waardoor de reeks convergeert. Zodra $|z| > 1$ is het omgekeerd: de termen worden groter en de reeks divergeert. Dat is meteen ook de reden waarom het convergentiegebied van machtreeksen steeds een cirkel is. De verzameling punten waarvoor de modulus $|z|$ constant blijft is precies een cirkel in het complexe vlak. Ook de functies $|z|^k$ zijn dus constant langsheen cirkels. In dit geval is de cirkel $|z| = 1$ de grens tussen convergentie en divergentie van de reeks.

De machtreeks heeft geen andere keuze dan divergentie wanneer $|z| = 1$. Zoals eerder besproken wordt een analytische functie immers oneindig groot in een pool. Het zal voor een machtreeks dus nooit mogelijk zijn om te convergeren in een gebied dat een pool omvat. (Een reeks kan enkel convergeren naar een oneindige waarde als de reeks zelf oneindig groot

⁴In het Engels spreken we van een *entire function*.

wordt.) Aangezien we net ook concludeerden dat het convergentiegebied van een machtreeks steeds een cirkel is, zal de afstand van de dichtstbijzijnde pool tot de oorsprong dus de convergentiestraal zijn. We zoeken met andere woorden de grootste cirkel rond de oorsprong die de pool niet bevat.

Bedenk zelf even wat de convergentiestraal zou zijn voor de Taylorreeks rond de oorsprong van de functie $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Aangezien de machtreeks convergeert voor $|z| < 1$, kan je verwachten dat een afgebroken machtreeks – een veelterm dus – ook een benadering van $f(z) = 1/(1+z^2)$ oplevert. Dat is zo, maar het is niet de beste veeltermbenadering, toch niet wanneer we zoals voorheen denken aan de benaderingsfout op het interval $[-1, 1]$.

Betere veeltermbenaderingen?

De ruimte P_n van veeltermen tot en met graad n is een lineaire ruimte. Ze kan beschreven worden door functies van de vorm

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (3.1)$$

met willekeurige getallen $a_k \in \mathbb{C}$. We noemen de functies x^k een *basis* voor de ruimte. Elke lineaire combinatie van de basisfuncties is een veelterm: daarom noemen we het een lineaire ruimte.

Zonder diep op de details in te gaan: wanneer je geïnteresseerd bent in een benadering op een interval, zoals het interval $[-1, 1]$, is er een meer geschikte basis om veeltermen van graad n te beschrijven. We gebruiken daarvoor de zogenaamde *Chebyshev veeltermen*. We noteren de Chebyshev veelterm van graad k als $T_k(x)$, zodat we veeltermen ook kunnen beschrijven in de alternatieve vorm

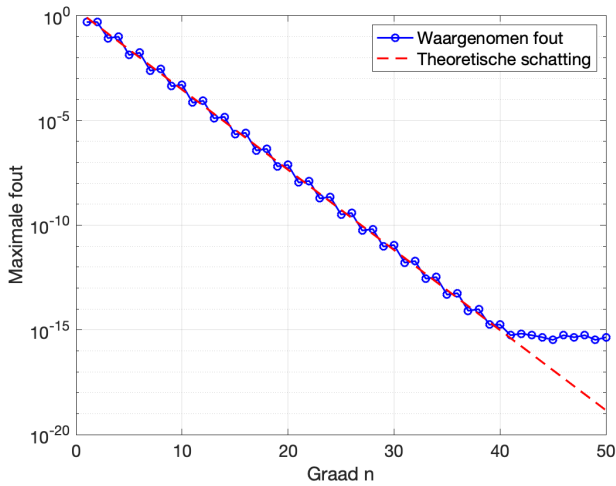
$$p(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x), \quad (3.2)$$

met willekeurige getallen $b_k \in \mathbb{C}$.

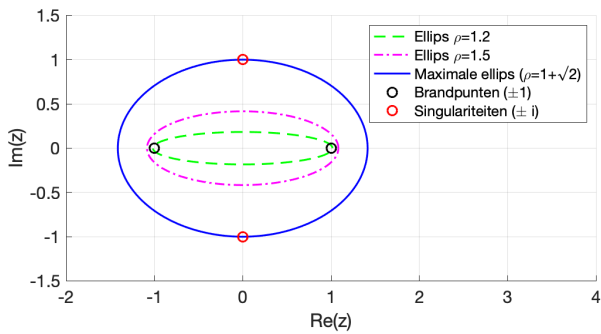
Eén van de mogelijke definities van Chebyshev veeltermen is recursief. We definiëren $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ en

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

Waarom zou je dit willen doen? Een eerste reden is dat het eenvoudig



(a) Convergentie van de veeltermbenaderingen in functie van de graad. De convergentiesnelheid is exponentieel.



(b) Illustratie van enkele Bernstein-ellipsen en de betrokken singulariteiten in het complexe vlak.

Figuur 3.3: Chebyshev-benadering van $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en bijbehorende Bernstein-ellipsen.

wordt om de beste veeltermbenadering te vinden, of toch een betere benadering dan machtreksen op het interval $[-1, 1]$. Het volstaat om de getallen of coëfficiënten b_k te kiezen als volgt:

$$b_k = \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ongetwijfeld roept deze formule vragen op. In plaats van die te beantwoorden, verwijzen we naar het erg leesbare standaardwerk van N. Trefethen over dit onderwerp [6].

Een tweede reden is van een heel andere aard. Functies van de vorm (3.1) en functies van de vorm (3.2) beschrijven dezelfde ruimte. Wiskundig gezien zijn ze dus equivalent. Zodra je op een computer werkt met algoritmes rond veeltermen, blijkt de voorstelling met Chebyshev veeltermen veel interessanter dan die met de basisfuncties x^k . Het verschil ligt dus niet in de wiskunde zelf, maar in de wens om veeltermen te gaan gebruiken in toepassingen.

Wat is dan de convergentiesnelheid van deze benaderingen, vraag je je misschien nog af? De snelheid wordt nog steeds bepaald door de dichtstbijzijnde pool. De Chebyshev-veeltermen hebben echter een constante grootte $|T_k(z)|$ op een ellipsvormig domein, die we een *Bernstein-ellips* noemen. De foci (of *brandpunten*) van de ellips zijn precies de punten ± 1 . Deze ellipsen spelen verder dezelfde rol als cirkels voor een machtreks. Voorstelling (3.2) convergeert dus in een ellipsvormig domein, namelijk in de grootste Bernstein-ellips die je kan maken zonder een pool in het inwendige. Hoe groter die ellips, hoe sneller de convergentie.

De precieze fout van de Chebyshev-benadering van graad n voor een analytische functie met polen gedraagt zich zoals ρ^{-n} met een factor $\rho > 1$. Het getal ρ vind je als het gemiddelde van de lange en korte as van de ellips.

We tonen dit gedrag in Figuur 3.3. In het geval van polen in de punten $\pm i$ kan je met wat vindingrijkheid achterhalen dat $\rho = 1 + \sqrt{2}$.

3.1.4 Conclusies

We beschreven in meer of mindere mate van detail volgende vaststellingen:

- veeltermen zijn geschikt om functies te benaderen
- hoe gladder de functie, in de zin dat ze meer afgeleiden bevat, hoe beter
- omgekeerd: functies die niet erg afleidbaar zijn hebben slecht convergerende veeltermbenaderingen

- analytische functies zijn oneindig afleidbaar, maar in dat geval wordt de convergentiesnelheid bepaald door de dichtstbijzijnde pool: we zoeken daarvoor de grootste ellips met brandpunten in $[-1, 1]$ die geen enkele pool bevat.

3.1.5 Veeltermen beschrijven de wereld!

Het is geen overdrijving om te stellen dat veeltermen het meest fundamentele bouwblok zijn om de continue wereld na te bouwen in een virtuele wereld. Je kan geen functie voorstellen op een computer, maar wel een eindige reeks getallen a_k in een voorstelling van de vorm $f(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$.

Zowat elke discrete voorstelling van modellen op een pc zijn gebaseerd op veeltermen. Ze worden gebruikt in numerieke methodes om integralen uit te rekenen, om afgeleiden te berekenen, om differentiaalvergelijkingen op te lossen, om optimalisatieproblemen op te lossen, om computer graphics beelden te genereren, om het weer te voorspellen, om ...

Een belangrijke kanttekening hierbij kunnen we nu wel al begrijpen. Wat kan je doen indien de functie die je wenst voor te stellen niet zo glad is? In dat geval convergeert een veeltermbenadering immers niet zo snel.

In geavanceerde toepassingen, zoals het uitvoeren van numerieke simulaties, gebruikt men vaker stuksgewijze veeltermen. Een functie wordt eerst opgedeeld in een groot aantal kleine stukjes, en op elk van die stukjes apart wordt een veeltermbenadering gebruikt. Als een functie niet glad is zal de veeltermbenadering niet snel convergeren, maar je kan de functie altijd opsplitsen in een groter aantal stukjes en zo alsnog convergentie bekomen. Om een term uit het domein van numerieke simulaties te laten vallen: dat is de basis van de veelgebruikte *eindige elementenmethode* of *finite element method* (FEM).

3.2 Rationale functies en rationale benaderingen

3.2.1 Waarom (niet) rationale functies?

Het begrip van de eigenschappen van veeltermen ging gepaard met het begrip van de afleidbaarheid van functies. Het grote potentieel van veeltermen was voor onderzoekers al snel duidelijk. De vele algebraïsche eigenschappen van veeltermen hebben ook geleid tot heel wat efficiënte algoritmes om continue problemen op te lossen met behulp van veeltermen. Een van de belangrijkste is wel deze: het product van twee veeltermen is opnieuw een veelterm.

Rationale functies hebben die eigenschappen ook. Immers, een veelterm is een speciaal geval van een rationale functie. Hebben ze ook wat meer te bieden? De ontwikkeling liet langer op zich wachten, en de meest voor de hand liggende reden daarvoor is dat zij ingewikkelder zijn. Rationale functies geven aanleiding tot *niet-lineaire problemen*. Die problemen zijn moeilijker, maar eigenlijk ook interessanter. Je kan een rationale functie niet zomaar schrijven als een lineaire combinatie van basisfuncties. Het niet-lineaire karakter ligt in de ligging van de polen.

3.2.2 Voorstellingen van rationale functies

Met een voorstelling bedoelen we een eenvoudige manier om rationale functies te beschrijven die we in algoritmes kunnen gebruiken om ermee te werken. De eerste voorstelling ligt voor de hand: mits een voorstelling van veeltermen kan je ook rationale functies voorstellen als een quotiënt ervan. Gebruik makend van voorstellingen die we eerder behandelden leidt dat tot

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^k}{\sum_{k=0}^n b_k z^k} = \frac{\sum_{k=0}^n c_k T_k(z)}{\sum_{k=0}^n d_k T_k(z)}.$$

We gingen er hier gemakshalve van uit dat de graad van teller en noemer dezelfde is, wat in het algemeen natuurlijk niet zo hoeft te zijn.⁵

Een dergelijke voorstelling als quotiënt is voor computationele doeleinden zelden een goed idee. Het gaat er daarbij niet om hoe je de veelterm voorstelt. Hoewel een rationale functie inderdaad wiskundig een deling van veeltermen is, zijn er haast geen algoritmes die dat expliciet hanteren in de voorstelling.

Een betere voorstelling van een rationale functie is als een som van partiëlebreuken, bijvoorbeeld

$$r(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z - z_k}.$$

Hierin lees je meteen af wat de polen zijn van de rationale functie, namelijk alle getallen z_k ⁶. We veronderstellen hier even dat de graad van de noemer hoger is dan die van de teller. Als dat niet zo is, dan kan je een Euclidische

⁵Men zegt soms dat een rationale functie graad (n, m) heeft indien de teller een veelterm is van graad n en de noemer een veelterm van graad m . In deze tekst werken we vooral met graad (n, n) en graad $(n - 1, n)$ benaderingen. We spreken dan kortweg over graad n .

⁶De getallen a_k zijn de *residu's* van de overeenkomstige polen, maar daar gaan we niet dieper op in.

deling uitvoeren en de restveelterm splitsen in partieelbreuken. We veronderstellen ook dat de polen van de rationale functie allen verschillend zijn. Zoniet, dan kan je termen toevoegen van de vorm $\frac{1}{(z-z_k)^2}$, en zo nodig ook hogere orde functies.

Op de genoemde voorwaarden na, zijn beide voorstellingen equivalent, in de zin dat ze dezelfde rationale functies kunnen beschrijven. Wat maakt de ene voorstelling dan ‘beter’ dan de andere? We merken alvast op dat de vorm met partieelbreuken bijna lineair is. De uitdrukking is een lineaire combinatie van functies van de vorm $1/(z-z_k)$. Het niet-lineaire karakter van rationale functies is beperkt tot de locatie van de polen z_k .

Het is een goed idee om je een rationale functie in te beelden als een som van polen, eerder dan als een deling van veeltermen.

De barycentrische voorstelling

We gaan nog één stapje verder. Het is verre van evident, maar een derde voorstelling van rationale functies blijkt nog veel interessanter te zijn (voor computationale doeleinden), namelijk de *barycentrische voorstelling*. Deze beschrijft een rationale functie als een deling van partieelbreuken:

$$r(z) = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z-z_k}}{\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z-z_k}}. \quad (3.4)$$

Inderdaad is een quotiënt van rationale functies opnieuw een rationale functie.

Zuiver wiskundig gezien is deze uitdrukking niet erg zinvol, omdat ze zo redundant is. De punten z_k zijn bijvoorbeeld geen polen. De waarde van $r(z)$ in z_k is immers eindig, zoals de limiet aantoonst:

$$\lim_{z \rightarrow z_k} r(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{z-z_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{b_j}{z-z_j}} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\frac{a_k}{z-z_k}}{\frac{b_k}{z-z_k}} = \frac{a_k}{b_k}.$$

Eigenlijk maakt de keuze van de zogenaamde *steunpunten* (‘*support points*’) wiskundig niet uit. Kies bijvoorbeeld een stel punten $(z_k)_{k=0}^n$ en definieer de *nodale veelterm*

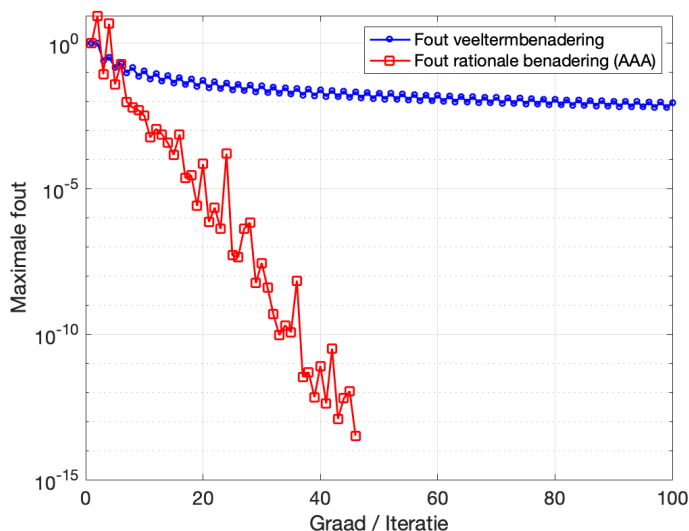
$$\ell(z) = \prod_{k=0}^n (z - z_k).$$

Je kan de teller en noemer van de eerste voorstelling van rationale functies delen door $\ell(z)$,

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/\ell(z)}{q(z)/\ell(z)}.$$

Splits je nu teller en noemer in partieelbreuken, dan krijg je de barycentrische voorstelling. Dit werkt voor elke nodale veelterm en toont meteen ook aan: de keuze van nodale veelterm heeft geen invloed op welke functies je wiskundig gezien voorstelt.

De voorstelling heeft louter een numeriek nut. Omdat ze zo onverwacht is, kan je je misschien wel inbeelden waarom dit niet meteen ter sprake kwam bij de eerste studies van rationale functies.



Figuur 3.4: Een vergelijking van de beste veeltermbenadering en de beste rationale benadering van de functie $f(x) = |x|$ in functie van de graad. De rationale benadering werd berekend met AAA.

3.2.3 Benaderen met rationale functies in theorie

Omdat rationale functies een soort veralgemening zijn van veeltermen, dacht men aanvankelijk dat de benaderende eigenschappen ervan ook niet zo bijzonder zouden zijn. Dat blijkt een grondige misvatting. De achilleshiel van veeltermbenaderingen zijn punten waarin een functie niet afleidbaar is. Het prototype van een dergelijke functie was $f(x) = |x|$. In 1964 verbaasde Donald Newman de wereld met een uiterst nauwkeurige ratio-

nale benadering van $|x|$ [4].⁷

Hoe deed Newman dat? Hij maakte een erg ingenieuze keuze van de polen van de benadering. Hij koos voor polen in het complexe vlak die dicht en dicht bij $x = 0$ liggen (voor stijgende graad n). Die wisselde hij af met nulpunten van de rationale functie. Aangezien de rationale functie oneindig groot wordt in elke pool, verkreeg hij zo een functie die er allesbehalve als een veelterm uitziet. Veeltermen zijn immers oneindig glad en hun variatie is sterk beperkt. De strategie van Newman werkt ook voor een bredere klasse van functies waarin het gebrek aan afleidbaarheid gelocaliseerd is in een klein aantal punten. In Figuur 3.4 vergelijken we de nauwkeurigheid van veeltermbenaderingen en rationale benaderingen.

Een andere klasse van functies die je erg goed kan benaderen zijn analytische functies met polen in het complexe vlak. Veeltermbenaderingen worden slechter wanneer de pool dicht in de buurt komt. Bovendien werpt de pool een soort van muur op in het complexe vlak, in de vorm van een cirkel in het geval van machtreeksen en in de vorm van een ellips in het geval van Chebyshev-benaderingen. De veeltermbenadering convergeert enkel binnen de muren, en divergeert daarbuiten.

Rationale benaderingen hebben geen last van zo'n muur. Zij kunnen verder kijken dan polen, of zelfs dan andere singulariteiten van analytische functies⁸. Ons eerder voorbeeld $f(x) = 1/(1 + x^2)$ is niet erg geschikt. Het is immers zelf een rationale functie! Een beter voorbeeld is de inverse tangens, of arctangens. Deze heeft geen polen in de punten $\pm i$ maar vertakkingspunten, zie pagina 62. De modulus van de arctangens gaat rond $\pm i$ nog steeds naar ∞ , maar wat langzamer: niet als $|z \pm i|^{-1}$, maar als $\ln|z \pm i|$. Een veeltermbenadering op het interval $[-1, 1]$ kan nooit de inverse tangens benaderen in pakweg het punt $0.2 + 2i$, want dat ligt buiten het convergentiegebied. Een rationale benadering kan dat wel.

3.2.4 Benaderen met rationale functies in praktijk

Een groot verschil tussen benaderen met rationale functies en benaderen met veeltermen ligt dus bij de mogelijkheid om polen te kiezen. Er is helaas geen algemeen recept om dat op een goede manier te doen. De beste locatie van de polen hangt eigenlijk af van de functie $f(x)$ die je wilt benaderen.

⁷Misschien is het dichterbij de waarheid om te zeggen dat Newman niet echt de hele wereld verbaasde, maar wel die veel kleinere groep van mensen met belangstelling voor benaderingstheorie. Alleszins, het kwam als een verrassing.

⁸Analytische functies kunnen ook vertakkingspunten ('branch points') hebben, of essentiële singulariteiten.

Er gebeurde heel wat onderzoek naar dit vraagstuk. Rationale benaderingen werden opgesteld op basis van voortgezette breuken, of op basis van zogenaamde Padébenaderingen. Vooral in dat laatste domein werden heel wat eigenschappen van rationale benadering beschreven.

In 2018 stelden Yuji Nakatsukasa, Nick Trefethen en Oliver Sète aan Oxford het AAA algoritme voor [3]. AAA staat voor Adaptive Antoulas Anderson, een referentie naar eerdere onderzoekers in het domein en naar het adaptieve karakter van het algoritme. AAA is erg flexibel en performant. Het maakt een rationale benadering louter op basis van een stel punten $(t_j)_{j=1}^m$ en bijhorende functie-evaluaties $(f(t_j))_{j=1}^m$ in die punten. Het feit dat je geen andere informatie moet verschaffen maakt het algoritme flexibel. Het algoritme kiest bijvoorbeeld zelf een geschikte benaderingsgraad. Het feit dat AAA voor vele functies benaderingen opstelt die dicht bij de beste rationale benadering liggen maakt het algoritme performant.

Er is voorlopig geen theoretische analyse van AAA. We kunnen wel een beetje schetsen hoe het algoritme werkt. Een cruciaal element erin is de barycentrische voorstelling, met een kleine aanpassing ten opzichte van (3.4). De voorstelling is van de vorm:

$$r(z) = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{w_k f(z_k)}{z - z_k}}{\sum_{k=0}^n \frac{w_k}{z - z_k}}. \quad (3.5)$$

Het verschil ligt in de keuze van de parameters. In vergelijking met (3.4) kozen we $a_k = w_k f(z_k)$ en $b_k = w_k$. Herinner je de waarde $r(z_k) = a_k/b_k$ van de rationale functie in de steunpunten z_k . Dat wordt hier:

$$r(z_k) = \frac{a_k}{b_k} = \frac{w_k f(z_k)}{w_k} = f(z_k).$$

De rationale functie r zal de te benaderen functie f dus interpoleren in de steunpunten z_k . Het komt er dan nog op neer om goede steunpunten (of interpolatiepunten) z_k te kiezen met bijhorende gewichten w_k .

Het is helaas niet eenvoudig om goede gewichten te kiezen. De afhankelijkheid van de gewichten w_k in uitdrukking (3.5) is sterk niet-lineair. Het is dus niet evident om de uitdrukking te gebruiken. Een truuk is om de uitdrukking te *lineariseren* door linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met de noemer van het rechterlid van (3.5). Dan krijg je:

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{w_k}{z - z_k} \right) r(z) = \sum_{k=0}^n \frac{w_k f(z_k)}{z - z_k}. \quad (3.6)$$

In deze vergelijking zijn zowel het linkerlid als het rechterlid lineaire uitdrukkingen in w_k .

Het algoritme werkt iteratief:

- Gegeven een huidige benadering, met n gewichten w_k en n steunpunten z_k , bekijkt AAA in welk punt t_j de fout $|r(t_j) - f(t_j)|$ momenteel het grootste is. Dat punt wordt toegevoegd aan de set van steunpunten, zodat we $n + 1$ punten hebben.
- Gegeven het nieuwe steunpunt worden $n + 1$ nieuwe gewichten berekend door een benadering van de vorm (3.6) te matchen met de gekende data in de overblijvende punten. Dat is niet super eenvoudig en ook niet super goedkoop, maar het is wel een oplosbaar probleem met gekende technieken uit lineaire algebra.

Typisch voorzie je voor een goede werking veel meer punten dan de uiteindelijke graad van de benadering, of met andere woorden $m \gg n$. Voor het eerst hebben we een algemene methode ter beschikking die op een eenvoudige wijze functies kan benaderen met rationale functies.

3.2.5 Conclusies

We beschreven in meer of mindere mate van detail volgende vaststellingen:

- rationale functies zijn geschikt om functies te benaderen
- waaronder functies die moeilijk zijn voor veeltermen, zoals $|x|$ en andere functies die niet afleidbaar zijn in geïsoleerde punten
- of functies die polen of andere singulariteiten vertonen in het complexe vlak, zoals de arctangens functie
- tenslotte is het AAA algoritme een eenvoudige en moderne manier om rationale benaderingen te berekenen.

3.3 Voorbeelden en toepassingen

Het AAA algoritme is zo verbazingwekkend effectief dat het sinds 2018 reeds toepassing vond in tal van domeinen. In de lessen zullen we er enkele illustreren. De auteurs van het AAA artikel werken zelf momenteel aan een review, die helaas nog niet publiek beschikbaar is.

Als je zelf aan de slag wilt: er is software beschikbaar. Het eenvoudigste pakket om functiebenaderingen (van univariate functies) op te stellen is allicht Chebfun, beschikbaar via <https://www.chebfun.org>. Om Chebfun te gebruiken heb je ook Matlab nodig.

Wat is nu de link met onderwerpen zoals de klank van muziekinstrumenten? Er komt nog heel wat bij kijken, maar de volgende drie zinnen zijn dicht bij de waarheid. De klank wordt bepaald door resonanties of eigen-

modes van de klankkast. Het is geen eenvoudig probleem om de eigenwaarden te vinden van een niet-lineair wiskundig model. In een groeiend aantal gevallen kan je AAA gebruiken om net dat probleem op te lossen.

Referenties

- [1] S. N. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynomes de degré donné*, Mem. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. (1912), 1–103.
- [2] Jean Mawhin, *Une brève histoire des mathématiques à l'Université Catholique de Louvain*, Revue des questions scientifiques **163** (1992), 369–386.
- [3] Yuji Nakatsukasa, Olivier Sète, and Lloyd N. Trefethen, *The AAA algorithm for rational approximation*, SIAM J. Sci. Comput. **40** (2018), no. 3, A1494–A1522.
- [4] D. J. Newman, *Rational approximation to $|x|$* , Mich. Math. J. **11** (1964), 11–14.
- [5] Herbert R. Stahl, *Poles and zeros of best rational approximants of $|x|$* , Constr. Approx. **10** (1994), 469–522.
- [6] Lloyd N. Trefethen, *Approximation theory and approximation practice, extended edition*, SIAM, Philadelphia, 2019.



P L A T F O R M

WISKUNDE

V L A A N D E R E N