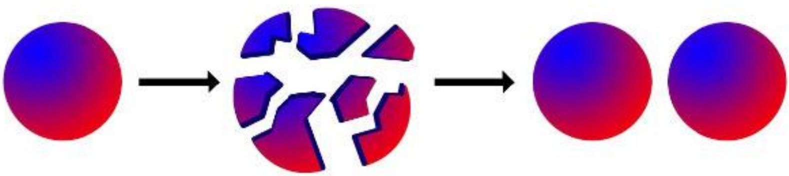
platform wiskunde nederland

Banach-Tarski: hoe groepentheorie van één meloen er twee maakt

Vakantiecursus 2024

Amsterdam, 23 en 24 augustus 2024

Antwerpen, 6 en 7 september 2024



PLATFORM WISKUNDE VLAANDEREN

Vakantiecursus2024

Voor leraren in de exacte vakken aan havo-, vwo-, hbo-leerlingen en andere belangstellenden organiseert het Platform Wiskunde Nederland (PWN), in nauwe samenwerking met het Platform Wiskunde Vlaanderen (PWV), in 2024 een vakantiecursus met als thema:

"Banach-Tarski: hoe groepentheorie van één meloen er twee maakt"

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, **vrijdag 23 augustus** en **zaterdag 24 augustus** op het CWI in Amsterdam en op **vrijdag 6 september** en **zaterdag 7 september** op de universiteit van Antwerpen (Campus Groenenborger) (de routebeschrijvingen staan aan het einde van deze brochure).

De cursus is voor wiskundedocenten en andere belangstellenden van elk niveau toegankelijk. Deelnemers ontvangen bij aanvang van de cursus een syllabus met teksten van de voordrachten. Het cursusgeld bedraagt €99. Voor studenten van lerarenopleidingen is het cursusgeld slechts €39. Voor gepensioneerden geldt een speciaal tarief van €55.

Bij de cursus is inbegrepen een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.

Aanmelding

Aanmelding voor deelname aan de cursus kan:
- door het aanmeldingsformulier achter in deze brochure in te vullen en vóór 1 augustus 2024 op te sturen aan PWN (adres op aanmeldingsformulier);
- via de website van Platform Wiskunde Nederland: http://www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus waar een online registratieformulier ingevuld en opgestuurd kan worden, eveneens vóór 1 augustus 2024.

Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daar prijs op stelt, gelieve het betreffende vakje aan te kruisen op het aanmeldingsformulier. Omdat zaken rondom "Register Leraar" momenteel aan verandering onderhevig zijn, is het mogelijk dat er een andere wijze van registratie plaatsvindt.

Sponsoring

Deze cursus wordt mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO). Organisatie vindt plaats in samenwerking met het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI), de Universiteit Antwerpen en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Voorlopig Programma

Amsterdam: vrijdag 23 en zaterdag 24 augustus
Antwerpen: vrijdag 6 en zaterdag 7 september

Wijzigingen voorbehouden

vrijdag

15.00-15.30	Ontvangst, koffie
15.30-15.35	Welkomstwoord
15.35-16.20	Jeroen Spandaw: Inleiding groepentheorie (deel 1)
16.20-16.45	Pauze
16.45-17:30	Jeroen Spandaw: Inleiding groepentheorie (deel 2)
17.30-18.30	Diner
18.30-19.15	Jeroen Spandaw: Inleiding groepentheorie (deel 3)
19.15-19.45	Pauze
19.45-20.30	David Eelbode: De Lie-groep SU(2) en haar toepassingen

zaterdag

09.30-10.00	Ontvangst, koffie
10.00-10.45	Stefaan Vaes: De stelling die we een paradox noemen
10.45-11.15	Pauze
11.15-12.00	Stefaan Vaes: De vrije groep F2 en twee vrije rotaties
12.00-13.00	Lunch
13.00-13.45	Stefaan Vaes: Het bewijs van de stelling van Banach-Tarski
13.45-14.30	Stefaan Vaes: In twee dimensies is alles anders
14.30	Afsluiting

Voorwoord

De vakantiecursus voor wiskundeleraren is al sinds 1946 een begrip in Nederland. Sedert 2023 vindt de vakantiecursus voor wiskundeleraren ook plaats in Vlaanderen, en wel in Antwerpen. Platform Wiskunde Nederland en Platform Wiskunde Vlaanderen werken op verschillende fronten samen, onder andere bij de zeer succesvolle rondreizende tentoonstelling ''Imaginary – pracht en kracht van wiskunde'' (2022-2023). Het samen organiseren van de vakantiecursus is weer een nieuw aspect in deze samenwerking, en we hopen in de toekomst op nog meer fronten samen te kunnen werken (zoals ''MathFest''), o.a. gesterkt door het feit dat we dezelfde taal spreken. Er kwamen altijd al wel Vlaamse leraren naar de vakantiecursus in Nederland, we hopen dit jaar een groter aantal Vlaamse wiskundeleraren (en andere geïnteresseerden) te kunnen begroeten, in Antwerpen of Amsterdam.

VC2024 heeft als thema ''groepentheorie''. Groepentheorie, dat wil zeggen de wiskundige studie van symmetrieën, is een toegankelijk domein van de wiskunde, dat zowel theoretisch als praktisch geïnteresseerden veel te bieden heeft. In de scheikunde spelen symmetrieën van moleculen en kristallen een belangrijke rol. Natuurkundigen gebruiken groepentheorie in de relativiteitstheorie, kwantumtheorie, deeltjesfysica en om behoudswetten af te leiden. Groepentheorie wordt gebruikt in beeldverwerking, codering, cryptografie, … In deze cursus richten we ons echter op een wiskundig-theoretische toepassing: de stelling van Banach en Tarski. Deze verbluffende stelling zegt dat een massieve driedimensionale bol van straal 1 opgedeeld kan worden in 5 niet-overlappende delen die vervolgens opnieuw kunnen worden samengevoegd tot twee bollen van straal 1. Bij het samenvoegen worden de 5 delen alleen maar geroteerd en getransleerd, maar niet vervormd. Deze stelling wordt vanwege haar contra-intuïtieve karakter meestal de Banach-Tarski-paradox genoemd.

Er wordt eerst een laagdrempelige introductie in de groepentheorie gegeven, met een focus op eenvoudige voorbeelden en op de concepten die nodig zijn voor het bewijs van de stelling van Banach en Tarski. Hierbij krijgen de deelnemers de gelegenheid om vertrouwd te raken met die concepten door enkele goed gekozen voorbeelden concreet door te rekenen. Vervolgens zal Stefaan Vaes laten zien hoe deze groepentheorie gebruikt kan worden om de stelling van Banach en Tarski te bewijzen, hoe onmogelijk die stelling ook mag lijken…

De cursus sluit aan op de wens van ministeries (in Nederland en Vlaanderen) om meer abstracte onderwerpen aan bod te laten komen in het curriculum. De nieuwe eindtermen in Vlaanderen verplichten de behandeling van een algebraïsche structuur, zoals groepen, in richtingen met 6 uur wiskunde. Het aangereikte materiaal biedt inspiratie en de broodnodige achtergrond aan leraren bij het invullen van hun lessen rond die abstracte structuren. De cursus is echter prima te volgen, daar zorgen de bekwame docenten voor!

We hopen weer veel wiskundeleraren, maar ook andere belangstellenden (zoals studenten van de lerarenopleiding, studenten wiskunde, wiskundigen en algemeen geïnteresseerden), te verwelkomen op een inspirerende vakantiecursus 2024!

Wil Schilders, voorzitter programma comité VC 2024 en directeur PWN
Giovanni Samaey, voorzitter Platform Wiskunde Vlaanderen

Docenten

Stefaan Vaes (hoofddocent)

Stefaan Vaes is gewoon hoogleraar wiskunde aan KU Leuven en voorzitter van Metaforum, de interdisciplinaire denktank van KU Leuven. Hij doet onderzoek in zuivere wiskunde, meer specifiek rond functionaalanalyse en von Neumannalgebra's. Dat zijn de wiskundige structuren die aan de grondslag liggen van de kwantummechanica en de kwantuminformatietheorie. Zijn werk werd in 2015 bekroond met de Francquiprijs, de belangrijkste wetenschappelijke onderscheiding in België. Stefaan Vaes is ook voorzitter van de vzw Vlaamse Wiskunde Olympiade die in Vlaanderen de wiskundeolympiade en Kangoeroewedstrijd organiseert.

Jeroen Spandaw

Jeroen Spandaw is gepromoveerd en gehabiliteerd in de algebraïsche meetkunde. Vervolgens heeft hij zijn eerstegraadslesbevoegdheid wiskunde en natuurkunde gehaald en gewerkt als docent wiskunde en algemene natuurwetenschappen in het secundair onderwijs. Sinds 2007 is hij universitair docent wiskunde en wiskundelerarenopleider aan de Technische Universiteit Delft, waar hij verschillende promovendi en afstudeerders begeleidt. Dit onderzoek betreft o.a. modelleeronderwijs en het optimaliseren van peer-discussies-werkvormen in secundair en tertiair onderwijs. Hij was lid van de Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs in Nederland en is nu lid van de advieskring namens het Koninklijk Wiskundig Genootschap die het SLO adviseert over de nieuwe examenprogramma's. Verder is hij lid van de programmacommissies van de Vakantiecursus en van de Nationale Wiskunde Dagen (https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen).

David Eelbode

David Eelbode behaalde zijn doctoraat aan de UGent, maar verhuisde in 2008 naar de Universiteit Antwerpen. Naast zijn grote lesopdracht binnen de Faculteit Wetenschappen en zijn onderzoek in de wereld van geometrische algebra's en spingroepen, is hij vooral actief op het vlak van wetenschapscommunicatie: zo stond hij al op meerdere podia met zijn wiskundig geïnspireerde Science Comedy, nam hij als spreker deel aan de Universiteit van Vlaanderen en zorgde hij voor een Brainwash talk op de NPO, en schreef hij reeds 2 populariserende boeken over wiskunde. Zijn laatste worp ("Wiskunde: Oneindig Veelzijdig") is daarbij uiterst geschikt voor leerkrachten en jongeren die overwegen om wiskunde te gaan studeren, en zich een algemeen beeld willen vormen van wat die tak van de wetenschap dan precies inhoudt.

NADERE INFORMATIE

Voor de (werk)colleges van Jeroen Spandaw is het handig (maar niet strikt noodzakelijk) om een kubus (bijvoorbeeld een niet door elkaar gehusselde Rubik's kubus) mee te nemen en een laptop met daarop geïnstalleerd GAP, te vinden middels https://www.gap-system.org/Download/.

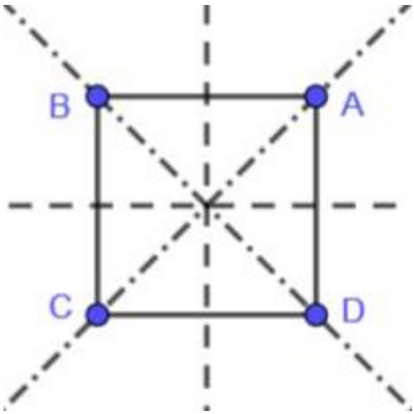
In de geïntegreerde hoor/werkcolleges geeft Jeroen Spandaw een inleiding in de groepentheorie. Hierbij worden veel voorbeelden gegeven en worden de nodige voorbeelden ook 'doorgerekend' zodat de deelnemers intuïtie kunnen ontwikkelen voor de abstracte concepten uit de groepentheorie. De voorbeelden betreffen veelal symmetrieën van eenvoudige meetkundige figuren omdat hier de abstracte groepen-theoretische concepten corresponderen met intuïtief duidelijke meetkundige concepten. Omdat we veel bezig zijn met rotaties in 3 dimensies zijn de deelnemers daarna ook goed opgewarmd voor de avondvoordracht van David Eelbode.

We behandelen in ieder geval de concepten die nodig zijn om het bewijs van de verbluffende Banach-Tarski paradox te begrijpen welke Stefaan Vaes op zaterdag zal behandelen. Afhankelijk van de tijd zullen we ook nog enkele andere fundamentele concepten uit de groepentheorie behandelen. Ook zult u kennismaken met de gratis software GAP voor groepentheorie. Hiermee kunnen snel berekeningen worden gedaan die met de hand veel tijd zouden kosten.

Inleiding groepentheorie (deel 1)

Jeroen Spandaw

We beginnen met de 4 rotaties en de 4 spiegelingen van een vierkant $ABCD$.



Hierna wordt de definitie van een groep gegeven. We zullen zien dat de 4 rotaties een groep vormen, maar de 4 spiegelingen niet. De 4 spiegelingen en de 4 rotaties samen vormen wel weer een groep. Dit leidt tot het begrip ondergroep of deelgroep.

We bewijzen een paar eenvoudige, maar fundamentele eigenschappen, zoals: een groep bevat precies één neutraal element en ieder element van een groep heeft precies één inverse element.

Om de intuïtie verder te scherpen zullen de deelnemers kennismaken met een collectie voorbeelden en non-voorbeelden van eindige en oneindige groepen.

Inleiding groepentheorie (deel 2)

Jeroen Spandaw

In dit college onderzoeken we de rotatiegroep van de 3-dimensionale kubus. We zullen op verschillende manieren de orde van deze groep bepalen, dat wil zeggen het aantal rotaties van de kubus. Om meer grip te krijgen op de structuur van de groep, kijken we naar de orde van de elementen. Bijvoorbeeld heeft een rotatie over 60 graden orde 6, omdat 6-voudige herhaling van de rotatie de identiteitsafbeelding geeft, maar 2-voudige of 3-voudige herhaling van de rotatie nog niet de identiteitsafbeelding geeft.

Vervolgens vergelijken we de rotatiegroep van de kubus met de permutatiegroep van 4 objecten. Abstract gezien blijken de twee groepen als twee druppels water op elkaar te lijken. We zullen de correspondentie tussen deze beide groepen precies beschrijven en zo kennismaken met nieuwe fundamentele begrippen uit de groepentheorie: conjugatieklasse, homomorfisme, isomorfisme, groepswerking, baan en stabilisatorondergroep.

We zullen ontdekken hoe de groepen-theoretische software GAP onze theoretische bewijzen kan ondersteunen door concrete berekeningen.

Als voorbereiding op de avondvoordracht door David Eelbode kijken we ook nog even naar de oneindige groep van alle rotaties van $\mathbf{R}^3$ die het centrum van de kubus vasthouden.

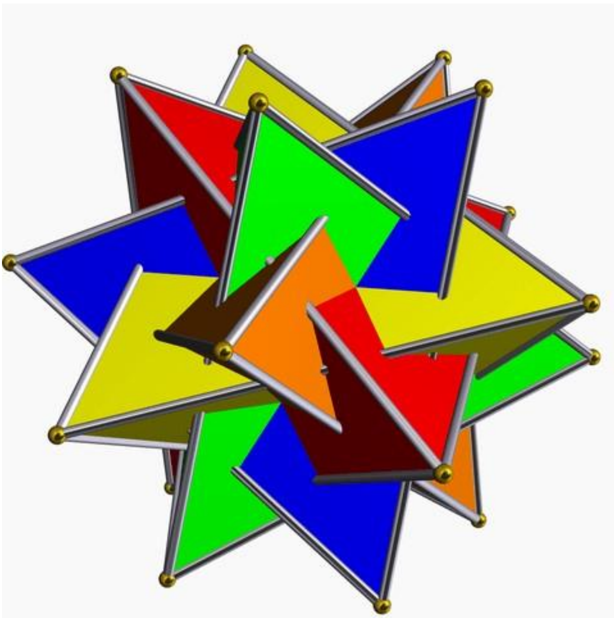
Inleiding groepentheorie (deel 3)

Jeroen Spandaw

Dit college bestaat uit twee delen:

i. We behandelen nog enkele fundamentele begrippen en stellingen: in een eindige groep deelt de orde van een ondergroep en de orde van een element de orde van de groep; bij de werking van een eindige groep is de lengte van een baan gelijk aan de index van de bijbehorende stabilisatorgroep.

ii. U gaat aan de slag (met of zonder GAP). U kunt de methoden van college 2 gebruiken om de interessante symmetriegroep van de (regelmatige) tetraëder en de nog interessantere symmetriegroep van de (regelmatige) icosaëder en dodecaëder te onderzoeken. Wat hebben de 2 banen van 5 ingebedde tetraëders in een dodecaëder te maken met de rotatiegroep van de dodecaëder? (Als u dit heel goed begrijpt, kunt u zelfs gaan nadenken over de nog interessantere 4-dimensionale analoga!)



De Lie-groep SU(2) en haar toepassingen

David Eelbode

In deze workshop zullen we de stap maken van eindige groepen naar oneindige groepen, met voorbeelden uit de gekende getallenverzamelingen R en C als tussenstations. In het bijzonder zullen we ons daarbij concentreren op enkele Lie-groepen, genoemd naar de Noorse wiskundige Sophus Lie. Om dit formeel goed te doen heeft men eigenlijk kennis nodig van differentiaalmeetkunde en topologie, maar dat zijn aspecten die we voornamelijk zullen negeren om het voldoende toegankelijk te houden. Het eerste deel steunt vooral op het concept van de determinant, waarmee we al een heel eind verder zullen geraken.

In het tweede deel zullen we iets dieper ingaan op groepen die rotaties (rond een vast punt in de ruimte) als elementen bevatten. Dat zal ons brengen van de klassieke rotatiegroep SO(3), die iedereen eigenlijk wel kent (alleen misschien niet onder die naam) naar de gerelateerde groep SU(2), die dan weer zeer goed gekend is door fysici. Het is dan ook hèt wiskundige object dat toelaat om te kunnen spreken over spin, die eerder mysterieuze eigenschap van elementaire deeltjes die vaak in een metafoor wordt gegoten met in de hoofdrol een kat in een doos. Om het verband tussen beide Lie-groepen te begrijpen zullen we ons onbevangen afvragen wat ‘de wortelfunctie’ zo speciaal maakt, en dit vertalen naar de wereld van de matrices. Dit steunt dan ook vooral op (elementaire) kennis over matrices en hun bewerkingen.

Als de tijd het toelaat zullen we aan het einde nog ingaan op gevorderd knip- en plakwerk: door na te denken over een gepaste visuele representatie voor de groep SO(3) zullen we inzien dat we vanzelf eindigen met een oppervlak in 4 dimensies, en zodoende het tweede deel van de workshop naar — jawel — hogere sferen brengen.

De paradox van Banach-Tarski

Stefaan Vaes[1]

Precies 100 jaar geleden publiceerden Stefan Banach en Alfred Tarski het artikel “Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes” in het zesde volume van het Poolse tijdschrift *Fundamenta Mathematicae*; zie [BT24]. Dat tijdschrift bestaat honderd jaar later trouwens nog steeds en publiceert in de zomer van 2024 volume 265.

In [BT24] vinden we een van de meest fascinerende resultaten uit de wiskunde, vandaag gekend onder de naam “paradox van Banach-Tarski”: je kan een massieve bol met een diameter van 1 meter in eindig veel stukken verdelen, deze stukken roteren en verschuiven en zo *twee* massieve bollen met *elk* een diameter van 1 meter bekomen. Hoe paradoxaal dit ook klinkt, het is eigenlijk een stelling, meer bepaald Théorème 24 in [BT24].

In een reeks van vier werkcolleges schetst Stefaan Vaes het bewijs van deze stelling van Banach-Tarski door gebruik te maken van groepentheorie. In de laatste les zullen we ook zien dat de paradox van Banach-Tarski alleen maar geldt in dimensie drie (of hoger) en dat de analoge uitspraak in dimensie twee over schijven in het vlak niet waar is.

Wie na deze lessenreeks meer wil weten over de paradox van Banach-Tarski en over heel wat bijkomende ontwikkelingen

[1]KU Leuven, Departement Wiskunde, stefaan.vaes@kuleuven.be.
SV krijgt onderzoeksfinanciering via het FWO onderzoeksproject G090420N van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek Vlaanderen en via Methusalemproject METH/21/03 van de Vlaamse Regering.

in groepentheorie verwijzen we naar het uitstekende boek [TW16]. Ook deze lessenreeks is in belangrijke mate gebaseerd op hoofdstukken 3 en 12 van dat boek.

Voorbereiding

We zullen in deze lessenreeks gebruikmaken van de volgende concepten. Enige vertrouwdheid hiermee is nuttig om de lessenreeks zo vlot mogelijk te volgen.

(i) Rotaties van de driedimensionale en tweedimensionale ruimte spelen een belangrijke rol in deze lessenreeks. Elke rotatie van $\mathbb{R}^3$ met rotatieas door de oorsprong is ook een lineaire transformatie $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en kan dus voorgesteld worden aan de hand van een 3×3 matrix A:

$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

We zullen gebruikmaken van dit verband tussen 3×3 matrices en rotaties van $\mathbb{R}^3$, en ook van het verband tussen 2×2 matrices en lineaire transformaties van $\mathbb{R}^2$. Je kan er hier meer over lezen.

Zo is bijvoorbeeld

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de rotatie over een hoek θ met de z-as als rotatieas. In een dergelijke matrixvoorstelling komt het samenstellen en inverteren van rotaties overeen met het vermenigvuldigen en inverteren van de bijhorende matrix.

(ii) We maken voortdurend gebruik van operaties met verzamelingen. Als $A \subset \mathbb{R}^3$ en $B \subset \mathbb{R}^3$ verzamelingen van punten zijn, bekijken we de unie $A \cup B$, de doorsnede $A \cap B$ en het verschil $A \setminus B$. Je kan er hier meer over lezen.

(iii) We zullen ook gebruikmaken van het verschil tussen aftelbare en overaftelbare verzamelingen. Je kan er hier en hier meer over lezen. We zullen alleen gebruikmaken van het volgende feit: als C de eenheidscirkel in het vlak is en $x_1, x_2, \ldots$ een rij punten in C is, dan bestaat er nog altijd een punt $x \in C$ dat verschillend is van alle x_n. Met andere woorden: je kan nooit alle punten van de cirkel C opsommen in een rij. De reden hiervoor is dat C overaftelbaar is, terwijl de rij $x_1, x_2, \ldots$ aftelbaar is.

(iv) We maken ten slotte gebruik van modulair rekenen en in ons geval specifiek van rekenen modulo 5. Je kan er hier meer over lezen. Dit betekent concreet dat we zullen rekenen (optellen en vermenigvuldigen) met de getallen 0, 1, 2, 3 en 4 "op veelvouden van 5 na". Zo zal $3+4=2$ omdat 7 hetzelfde is als 2 op een veelvoud van 5 na. Op dezelfde manier is $3 \times 3 = 4$ omdat 9 hetzelfde is als 4 op een veelvoud van 5 na.

Les 1. De stelling die we een paradox noemen

In deze les voeren we het wiskundige kader in waarbinnen we de stelling van Banach-Tarski in de derde les zullen bewijzen. We bekijken de driedimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$. De rotaties, verschuivingen en spiegelingen brengen samen de *groep* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3)$ *van isometrieën* van $\mathbb{R}^3$ voort. We noemen twee deelverzamelingen $A \subset \mathbb{R}^3$ en $B \subset \mathbb{R}^3$ *equivalent* wanneer we A in eindig veel stukken kunnen verdelen, op elk van deze stukken een isometrie toepassen en zo een onderverdeling van B bekomen. De stelling van Banach-Tarski zegt dus dat één massieve bol equivalent is met twee massieve bollen met dezelfde diameter.

Het concept van equivalente deelverzamelingen bekijken we ook algemener, wanneer een willekeurige groep G werkt op een verzameling X. Dit concept van groepsactie (of groepswerking) kwam aan bod in de tweede les van Jeroen Spandaw. Hierboven gebruikten we de actie van $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3)$ op $\mathbb{R}^3$. In het bewijs van de stelling van Banach-Tarski maken we ook gebruik van de deelgroep $\mathrm{SO}(3)$ van rotaties met rotatieas door de oorsprong, en haar actie op de eenheidssfeer $S \subset \mathbb{R}^3$ met middelpunt in de oorsprong.

We zetten de eerste stappen in de richting van het bewijs van de stelling van Banach-Tarski. We tonen aan dat wanneer x een willekeurig punt in de eenheidsbol $B \subset \mathbb{R}^3$ is, dan B en $B \setminus \{x\}$ equivalent zijn. Het bewijs hiervan zal je doen denken aan Hilberts hotel. In een volgende stap tonen we aan dat zelfs voor elke aftelbare deelverzameling $A \subset S$ van de eenheidssfeer, de verzamelingen S en $S \setminus A$ equivalent zijn onder de actie van $\mathrm{SO}(3)$ op S.

Les 2. De vrije groep $\mathbb{F}_2$ en twee vrije rotaties

We hebben twee inzichten nodig om in de volgende les de stelling van Banach-Tarski te bewijzen: in drie dimensies zijn er "heel veel" rotaties en verder heeft een massieve bol “heel veel” onderverdelingen in deelverzamelingen. Kortom, er zijn “heel veel” mogelijkheden om equivalente verzamelingen te maken.

De verschuivingen van $\mathbb{R}^3$ vormen een zogenaamde *commutatieve groep*: wanneer t_1 en t_2 verschuivingen zijn, dan zijn de samenstellingen $t_1 \circ t_2$ en $t_2 \circ t_1$ dezelfde verschuiving. Dit kan je ook schrijven als de relatie (of gelijkheid)

$$t_1^{-1} \circ t_2^{-1} \circ t_1 \circ t_2 = \mathrm{id}\ .$$

Deze relatie geldt typisch niet in SO(3): wanneer α en β rotaties zijn met verschillende rotatieas, dan zijn $\alpha \circ \beta$ en $\beta \circ \alpha$ verschillend, zodat

$$\alpha^{-1} \circ \beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta \neq \mathrm{id}\ .$$

Maar er is meer: we zullen in deze les zien dat er rotaties α en β bestaan waarvoor geen enkele van dit soort relaties geldt.

We definiëren wat we verstaan onder *vrije* elementen a en b van een groep G. Ruwweg gesproken zijn het elementen die aan geen enkele niet-triviale relatie voldoen. De triviale relaties zijn de relaties

$$a^{-1}a = b^{-1}b = aa^{-1} = bb^{-1} = e$$

en hun gevolgen, zoals bijvoorbeeld $abb^{-1}a = aa$. We noteren als $\mathbb{F}_2$ een groep G die voortgebracht wordt door twee vrije elementen a en b en noemen haar de *vrije groep met twee voortbrengers*.

Het doel van deze les is om twee concrete vrije rotaties in SO(3) te construeren. We zullen in deze les aantonen dat de rotaties

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

vrij zijn. Merk op dat α een rotatie is met de z-as als rotatieas, terwijl β een rotatie is met de x-as als rotatieas.

Om aan te tonen dat α en β vrij zijn, maken we gebruik van de methode van [Tao04]. Dit is een mooi argument, waarbij we zullen rekenen met gehele getallen modulo 5. Achterliggend is er het algemene pingponglemma van Serre dat in vele gevallen toelaat om aan te tonen dat twee matrices vrij zijn. Met dat lemma kan je bijvoorbeeld ook bewijzen dat de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

vrij zijn.

Les 3. Het bewijs van de stelling van Banach-Tarski

In deze les bewijzen we de stelling van Banach-Tarski. We gebruiken de groep G van rotaties van $\mathbb{R}^3$ (met rotatieas door de oorsprong) en haar actie op de eenheidssfeer $S \subset \mathbb{R}^3$. De belangrijkste stap is om te bewijzen dat de sfeer S een paradoxale decompositie heeft: je kan S onderverdelen in twee delen A en B die allebei equivalent zijn met heel S. Kortom: je kan van één exemplaar van de sfeer er twee maken.

Om die stap te bewijzen, voeren we het concept van een paradoxale decompositie van een groep in. We construeren een concrete paradoxale decompositie van de vrije groep $\mathbb{F}_2$. We maken vervolgens gebruik van de concrete realisatie uit les 2 van $\mathbb{F}_2$ als groep voortgebracht door twee rotaties α en β. Deze actie van $\mathbb{F}_2$ op de sfeer gebruiken we om de paradoxale decompositie van $\mathbb{F}_2$ over te dragen naar de sfeer.

Deze laatste stap is niet constructief en maakt gebruik van het zogenaamde keuzeaxioma.

Eigenlijk kunnen we op die manier alleen maar een paradoxale decompositie bekomen van de sfeer waaruit we een rij van punten hebben weggelaten. Dankzij de resultaten uit de eerste les is dit voldoende om de stelling van Banach-Tarski te bewijzen.

Les 4. In twee dimensies is alles anders

In hetzelfde artikel [BT24] uit 1924 bewijzen Banach en Tarski ook een op het eerste zicht minder verrassende stelling: de paradox geldt niet in dimensie twee! Het is niet mogelijk om een schijf met straal 1 in $\mathbb{R}^2$ in eindig veel stukken te verdelen, deze te roteren en te verschuiven en zo twee schijven met straal 1 te bekomen.

We noemen de driedimensionale stelling van Banach-Tarski een paradox omdat ze in tegenspraak is met onze intuïtie over *volume*. We hebben een aantal evidente verwachtingen over het concept volume. Als we een verzameling opdelen in stukken, dan is het volume van het geheel gelijk aan de som van de volumes van de stukken. Als we een verzameling verschuiven en roteren, dan verandert haar volume niet. Het is een gevolg van de stelling van Banach-Tarski dat het onmogelijk is om het volume te definiëren van totaal willekeurige deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ zonder deze evidente verwachtingen te schenden. De paradoxale decompositie in de stelling van Banach-Tarski is een decompositie in deelverzamelingen die zo vreemd zijn dat ze geen volume hebben, niet in de betekenis dat hun volume gelijk aan nul is, maar in de betekenis dat het intrinsiek onmogelijk is om hun volume zinvol te definiëren.

In twee dimensies is de situatie echter drastisch anders. Banach en Tarski bewijzen dat het wel mogelijk is om op een consistente manier een *oppervlakte* te definiëren voor willekeurige deelverzamelingen van het vlak. De achterliggende reden is dat er substantieel "minder" rotaties van het vlak zijn dan rotaties van de driedimensionale ruimte.

We zullen in deze les het concept invoeren van een *amenable* groep. We zullen zien dat de groep $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ van het vlak $\mathbb{R}^2$ amenable is, terwijl de vrije groep $\mathbb{F}_2$, de rotatiegroep $\mathrm{SO}(3)$ en de isometriegroep $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3)$ niet amenable zijn (als abstracte groepen). We zullen hiervan gebruikmaken om aan te tonen dat er geen paradox van Banach-Tarski is in twee dimensies.

Referenties

[BT24] S. Banach en A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundam. Math.* **6** (1924), 244-277. Downloaden

[Tao04] T. Tao, The Banach-Tarski paradox. *Lecture notes.* Downloaden

[TW16] G. Tomkowicz en S. Wagon, The Banach-Tarski paradox. Second edition. *Encyclopedia Math. Appl.* **163**, Cambridge University Press, New York, 2016. Kopen

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt €99, waarbij de syllabus en de maaltijden zijn inbegrepen. Voor studenten aan lerarenopleidingen bedraagt het cursusgeld €39, terwijl voor gepensioneerden een gereduceerd tarief geldt van €55.

Aanmelding

Via de website: http://www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus of per post door het aanmeldingsformulier achterin de brochure in te vullen en op te sturen naar:

Platform Wiskunde Nederland
o.v.v. Vakantiecursus 2024
Science Park 123
1098 XG Amsterdam

Tegelijkertijd dient men het cursusgeld over te maken op bankrekening **NL95INGB0005864482** van de Stichting Platform Wiskunde Nederland onder vermelding van uw naam en VC2024.

Onze buitenlandse gasten kunnen voor betaling gebruik maken van onderstaande gegevens.

BANK	ING BANK N.V.
BIC	INGBNL2A
IBAN	NL95INGB0005864482

NB. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit
Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve dit bij aanmelding te laten weten door aankruising van het betreffende vakje op het aanmeldingsformulier.

Plaats(en)

Antwerpen: Universiteit Antwerpen, Campus Groenenborger, zaal G.T.138

Amsterdam: CWI, Turingzaal, Science Park 123.

Syllabus

De syllabus zal worden uitgereikt bij aankomst op de cursus.

Informatie

Voor vragen over de Vakantiecursus kunt u zich wenden tot het bureau van Platform Wiskunde Nederland, via het mailadres:
vakantiecursus@platformwiskunde.nl

Contactinformatie

Bureau PWN, 020 – 592 4006; e-mail: vakantiecursus@platformwiskunde.nl;

Platform Wiskunde Nederland, Science Park 123, 1098 XG Amsterdam

Docenten

Dr. J.G. Spandaw, TU Delft, Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft,
j.g.spandaw@tudelft.nl

Prof. Dr. D. Eelbode, Departement Wiskunde, UAntwerpen, Middelheimlaan 1, 2020 Antwerpen
david.eelbode@uantwerpen.be

Prof. Dr. S. Vaes, Departement Wiskunde, KU Leuven, Celestijnenlaan 200B – bus 2400, 3001 Leuven, België
stefaan.vaes@kuleuven.be

Routebeschrijvingen

Universiteit Antwerpen, Campus Groenenborger, zaal G.T.138

Voor een plattegrond van de campus, routebeschrijvingen en informatie over parkeren zie:
https://www.uantwerpen.be/nl/overuantwerpen/campussen/campus-groenenborger/

CWI Amsterdam

Voor routebeschrijvingen zie: https://www.cwi.nl/nl/over/contact/

Parkeren: Op het terrein van het CWI is betaald parkeren van kracht. Bij het oprijden moet u een parkeerkaart trekken. Gelieve deze inrijkaart te bewaren, U ontvangt van de contactpersoon bij de ingang een uitrijkaart. Bij het uitrijden steekt u eerst de inrijkaart in, deze komt terug, en daarna steekt u de uitrijkaart in, waarna de slagboom omhoog gaat.

AANMELDINGSFORMULIER
VAKANTIECURSUS 2024

‘Banach-Tarski: hoe groepentheorie van één meloen er twee maakt’

Ondergetekende,

Naam:

Adres:

Postcode:

Woonplaats:

Geboortedatum:

Telefoon:

E-mail:

wenst deel te nemen aan de Vakantiecursus 2024 op de locatie

Amsterdam op vr. 23 en za. 24 augustus 2024 [ ]

Antwerpen op vr. 6 en za. 7 september 2024 [ ]

en heeft het verschuldigde bedrag van €99,- (dan wel €39,- of €55) overgemaakt (voor rekeningnummer zie pagina 11).

Mijn voorkeur gaat uit naar vegetarisch eten [ ]

Ik heb een bepaalde allergie [ ]

Indien ja, aub de dieetwensen mailen naar vakantiecursus@platformwiskunde.nl

Nascholingscertificaat [ ]

Indien van toepassing, hier het adres van de onderwijsinstelling vermelden:

……

Gelieve dit formulier vóór 1 augustus 2024 te sturen naar:

Platform Wiskunde Nederland
o.v.v. Vakantiecursus 2024
Science Park 123
1098 XG Amsterdam