

2 Kennismaking met stangenconstructies (Workshop)

Rainer Kaenders

Opgave: (Pantograaf)

Knip één van de vier kartonnen pantografensetjes A/B/C/D uit. Delen 1, 2, 3, 4 behoren tot de basisopbouw van de pantograaf. Delen 5 en 6 dienen ervoor om daarmee preciezer te kunnen tekenen. Pons gaatjes bij de kleine cirkeltjes voor splitpennen en pons telkens één gaatje bij A4/B4/C4/D4 voor een penpunt.

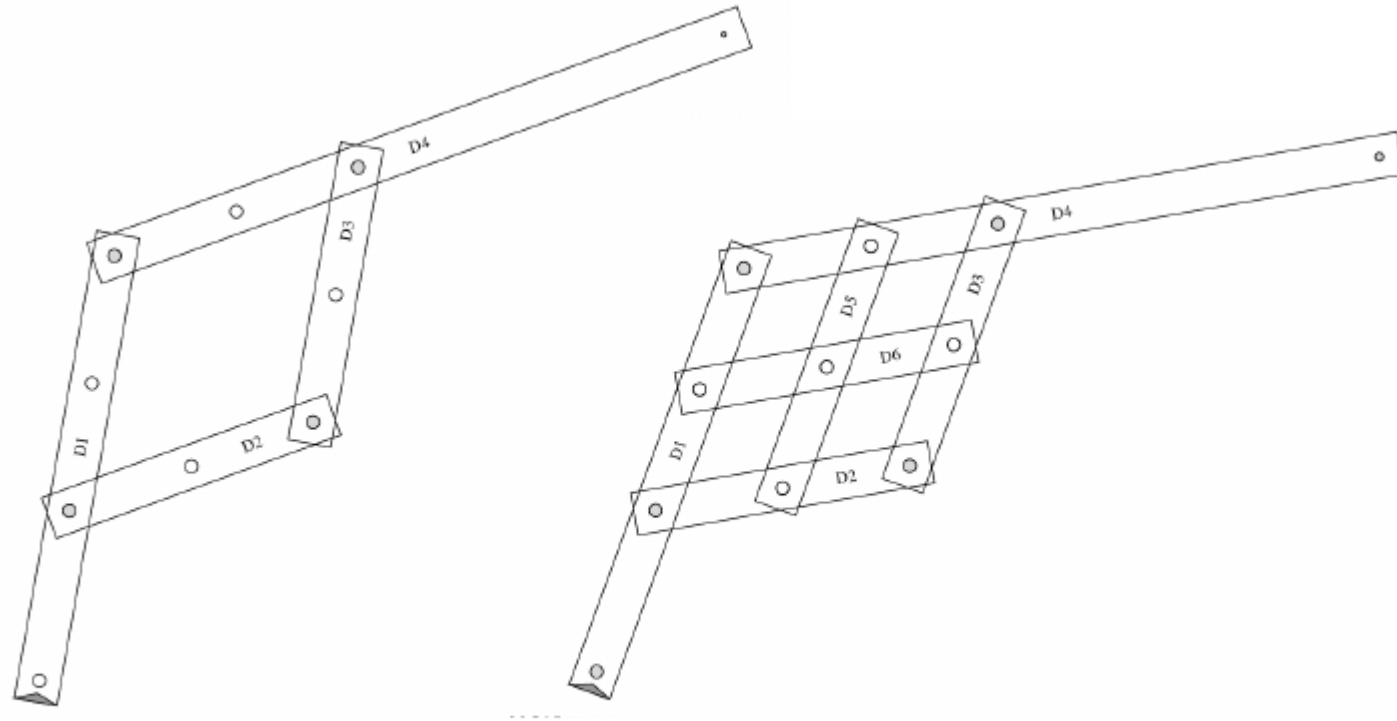
Hint: Maak de gaatjes, zo mogelijk, niet groter dan voor de splitpennen of het penpunt nodig. Anders wordt de tekening niet precies.

Zet nu de pantograaf volgens de bouwplaat in figuur 2.1 met splitpennen in elkaar. Als je de constructie nog uitbouwt, zoals in figuur 2.1 rechts, wordt je tekening preciezer.

Maak hiervoor de stangen 5 en 6 met vijf verdere splitpennen vast en verwijder de splitpen, die 2 en 3 verbindt. Als je dan beweegt blijven de gaatjes waar 2 en 3 verbonden waren alsnog op elkaar. (Hoe komt dat?)

¹Mareike Mink (2018). *Geometrie entdecken in technischen Anwendungen – Lernumgebungen für MINT-Unterricht mit Alltagsbezug*. Springer-Spektrum.

Neem nu de sjabloon met de driehoek en de cirkel en punten Z_1 en Z_2 erop en pons bij deze telkens een gaatje voor een splitpen. Maak nu het vrije einde van $A1/B1/C1/D1$ (dat met een grijze driehoek is gemarkeerd) met een splitpen aan Z_1 vast en zet er een pen in het kleine daarvoor voorziene gaatje aan het vrije einde van $A4/B4/C4/D4$.



Figuur 2.1: Bouwplaten voor pantografen (uit het boek van Mareike Mink)

Teken nu met de pantograaf als volgt:

1. Beweeg de pen zodanig, dat het middelpunt van de gaatjes, waar $A_2/B_2/C_2/D_2$ en $A_3/B_3/C_3/D_3$ samenkomen, de rand van de cirkel zo precies mogelijk langs gaat (als je hiervoor de pen verwijdert, kun je beter zien). Wat verkrijg je daarbij?

Hint: probeer het eerst even zonder pen en probeer uit hoe de pantograaf überhaupt beweegt.

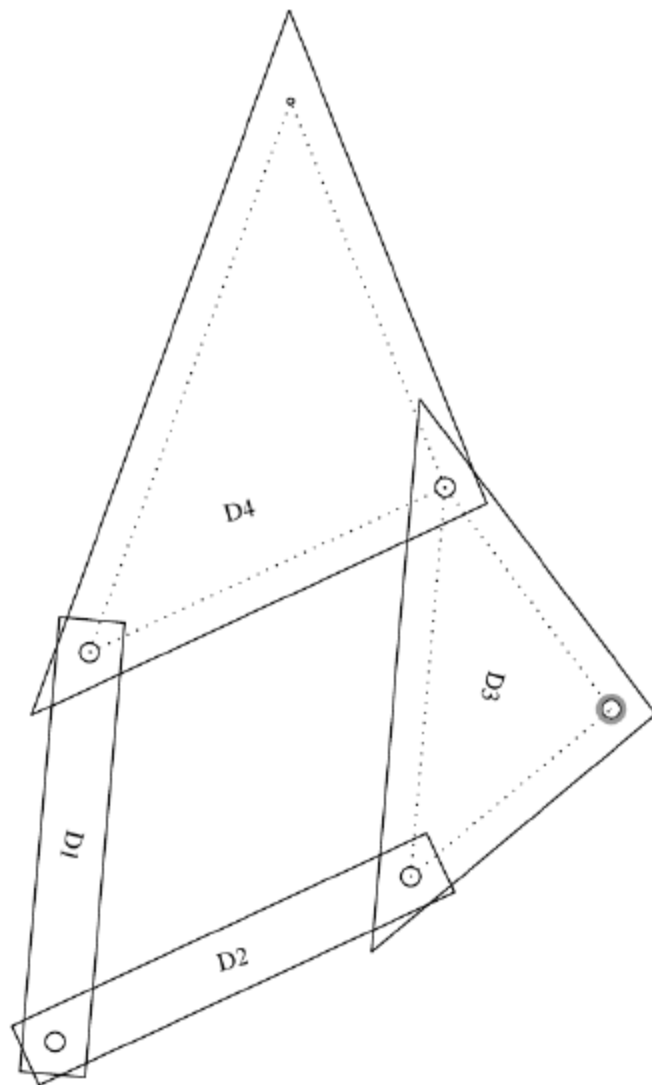
2. Denk er nu over na wat je krijgt als je hetzelfde met de driehoek doorvoert. Ga nu dezelfde oefening voor de driehoek doen, die je al voor de cirkel hebt gedaan.
3. Welke resultaten vermoed je voor het geval dat de pantograaf bij Z_2 (in plaats van Z_1) wordt vastgemaakt? Zet nu de pantograaf bij Z_2 vast en ga nu nogmaals langs beide figuren.
4. Vergelijk jullie resultaten met verschillende pantografen in de groep. Wat hebben het gegeven figuur en het beeldfiguur met elkaar gemeen? Waar zijn ze verschillend? Hoe beïnvloedt de gekozen pantograaf het resultaat? Welke afmetingen of lengteverhoudingen spelen hier een rol? Welke niet? Welke moeilijkheden zijn er ontstaan?
5. Maak nu zelf een verdere sjabloontekening met een zelf gekozen vast punt Z_3 , die jullie dan met de verschillende pantografen overdragen. Waar moet je hier allemaal op letten?
6. Kun je het verschijnsel van de pantograaf uitleggen?

Opgave: (Plagiograaf)

Knip één van de vier bouwsetjes A/B/C/D uit karton voor de plagiograaf uit. Pons kleine gaatjes bij de kleine cirkeltjes voor splitpenen en respectievelijk telkens eentje bij A4/B4/C4/D4 voor een penpunt.

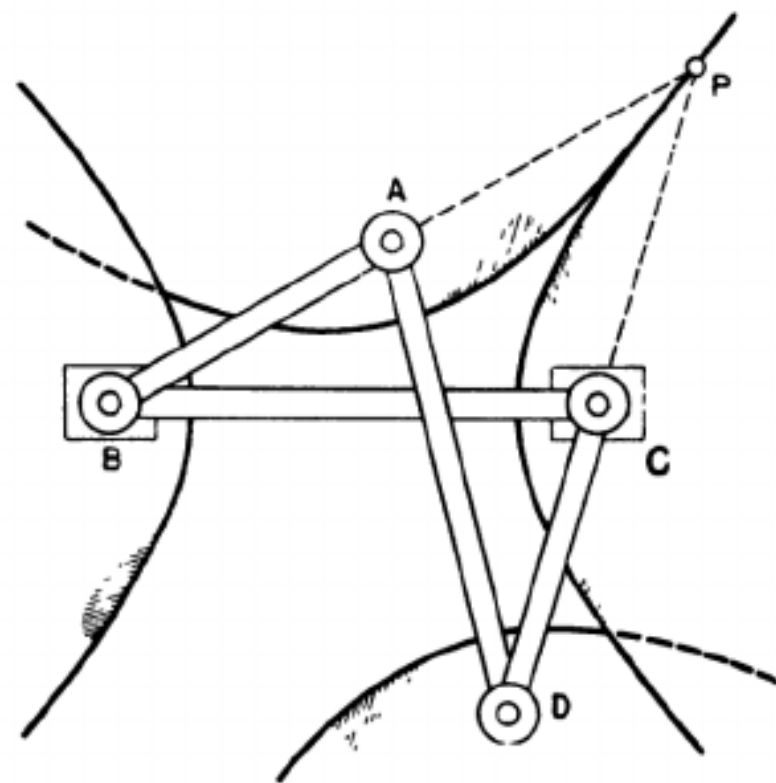
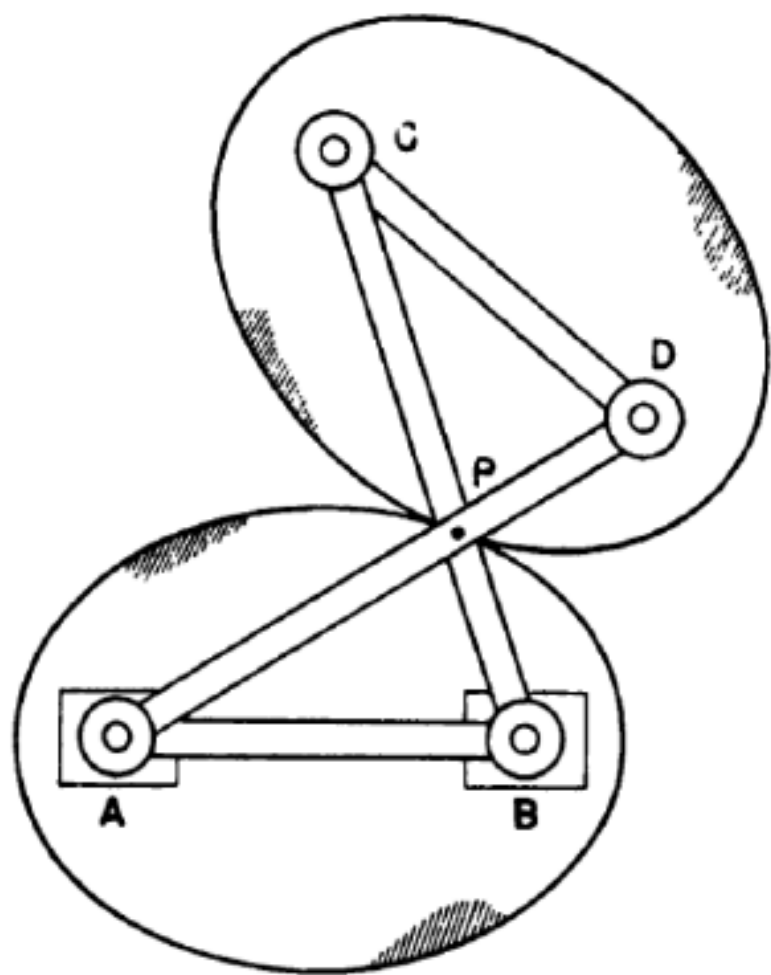
Zet nu de plagiograaf volgens de bouwplaat hier rechts met vier splitpenen in elkaar. Let erop dat het vrije einde van A3/B3/C3/D3 resp. A4/B4/C4/D4 datgene is, wat met een grijze ring oftewel met een kleinere gaatje voor het penpunt is gemarkeerd.

Om nu de bijzondere eigenschappen van de plagiograaf te kunnen ontdekken, heb je weer een sjabloon nodig – deze keer die met cirkel, driehoek en een enkel punt Z. Maak hier een klein gaatje voor een splitpen en zet er de splitpen in, die de stangen 1 en 2 met elkaar verbindt. Zet nu een pen in het vrije gaatje bij A4/B4/C4/D4.



Teken nu met de plagiograaf op de volgende manier.

1. Beweeg de pen zo, dat het middelpunt van een gaatje aan een vrij einde A3/B3/C3/D3 de cirkelrand zo precies mogelijk langs gaat. Welk resultaat krijg je dan?
2. Denk erover na, wat je verkrijgt als je hetzelfde voor een driehoek doet? Herhaal het tekenproces voor de driehoek.
3. Vergelijk in de groep de resultaten voor de verschillende plagiografen. Wat hebben de figuur op de sjabloon en de beeldfiguur gemeen? Waar zijn ze verschillend? Hoe beïnvloedt de gekozen plagiograaf het resultaat? Welke afmetingen of lengteverhoudingen spelen hier een rol? Welke niet? Welke moeilijkheden zijn er ontstaan?
4. Maak nu zelf een verdere sjabloontekening met een zelf gekozen vast punt Z' , die jullie dan met de verschillende pantografen overdragen. Waar moet je hier allemaal op letten?
5. Hoe verklein je met een plagiograaf? Om welke hoek wordt gedraaid?
6. Kun je wellicht het verschijnsel van de plagiograaf uitleggen?



Figuur 2.2: Constructies voor ellips en hyperbool door schuivende snijpunten van Robert C. Yates

2.2 Enkele opmerkingen over stangenconstructies

Opgave: (Ellips en hyperbool)

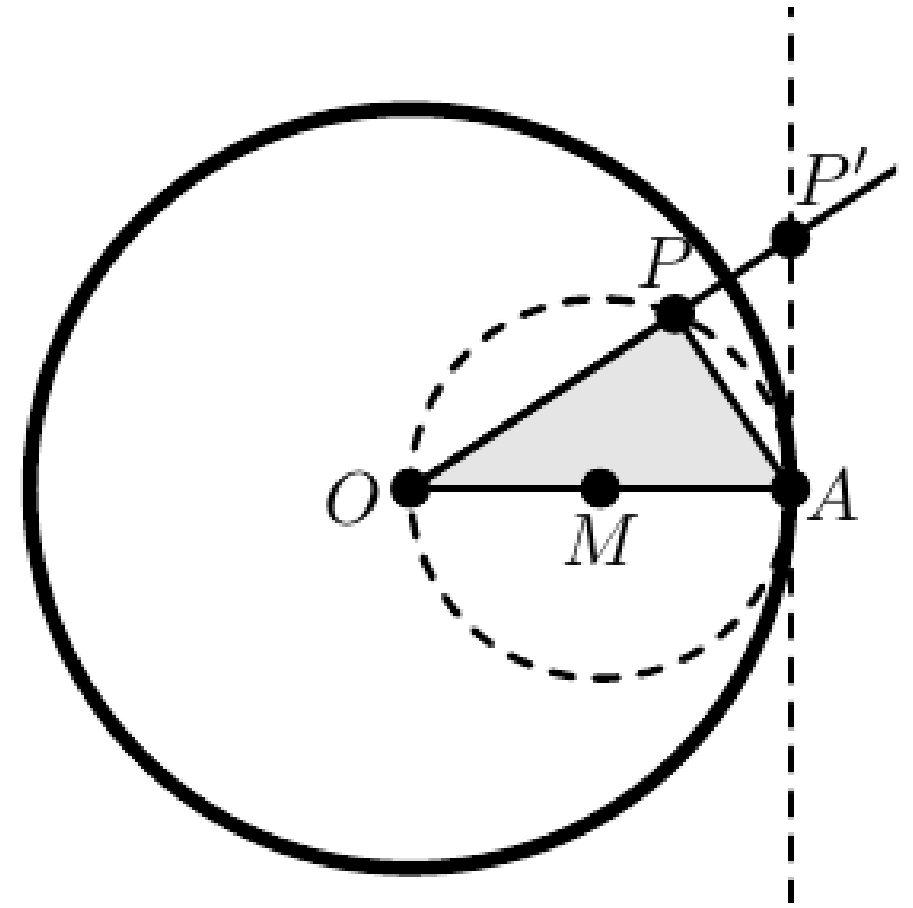
De constructies² van Robert C. Yates in figuur 2.2 zijn geen stangenconstructie in de strenge zin. Deze constructies berusten beiden op een *contra-parallellogram*. Bewijs nu...

1. Het snijpunt P van AD en BC bij de constructie links tekent een ellips, d.w.z. dat $|PA| + |PB|$ is constant voor alle standen van het mechanisme, en het snijpunt P van BA en DC bij de constructie rechts tekent een hyperbool, d.w.z. dat $||PA| - |PB||$ is constant voor alle standen van het mechanisme.
2. Kun je ook zien, dat als de AB links en BC rechts vast aan het vlak verbonden zijn, er twee ellipsen of twee hyperbolen op elkaar afrollen?

²Blz. 183 in Robert C. Yates (1974). *Curves and Their Properties*. Classics in Mathematics Education A Series, Volume 4, National Council for Teachers of Mathematics.

Opgave: (Cirkelinversie)

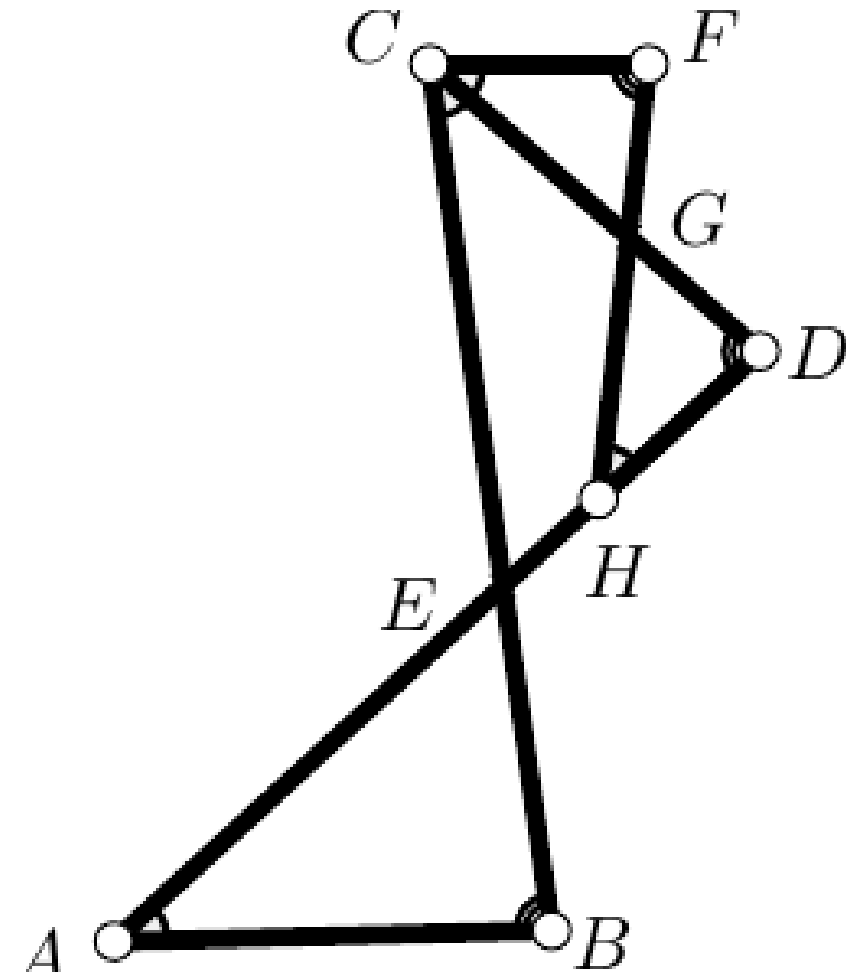
1. Laat meetkundig zien dat een cirkel, die door het middelpunt van de spiegelcirkel gaat en deze raakt, op een lijn wordt afgebeeld.
2. Gebruik een centrische strekking om in te zien dat elke cirkel door het middelpunt van de reflectiecirkel op een rechte lijn wordt afgebeeld.



Opgave: (Verdubbeling van hoeken)

Gegeven is een contra-parallellogram van stangen $ABCD$ met $|AB| = |CD|$ en $|BC| = |AD|$, zodat twee zijden elkaar in een punt E snijden. Eraan vast gehangen zit een tweede contra-parallellogram $HDCF$, zo dat $|FH| = |CD| = |AB|$ en H op AD ligt.

Laat zien, hoe je met dit mechanisme bij een gegeven hoek een twee keer zo grote hoek kunt maken.



Opgave: (Tusi paar)

Een *Tusi paar* is een paar van cirkels k en k' met stralen r en r' , zo dat $r = 2r'$. De cirkel k is vast en k' draait van binnen op de rand van k . Daarbij laten we een punt P zijn baan tekenen.

1. Onderzoek de baan van P en bewijs je vermoeden.
2. Gebruik het dubbele contra-parallellogram uit de vorige opgave om vanuit het Tusi paar constructie een stangenconstructie te realiseren, die een lijn tekent.

